This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS

PAR

E. JOUFFRET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

153
.2

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
37217 Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS

PAR

E. JOUFFRET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

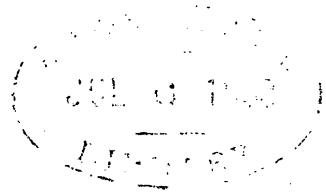
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

(Tous droits réservés.)

5959.06
Math ~~5039.06~~



Bowditch fund

PRÉFACE.

Dans l'Avant-Propos de notre *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions* (p. XVIII), nous avons avancé que les théories classiques peuvent trouver d'utiles inspirations dans ce quatrième champ que nous avons appelé l'ÉTENDUE, monde géométrique plus vaste que le leur, où des droites, des plans *et des espaces* sont déterminés respectivement par deux, trois et *quatre* points et sont coupés *par un espace* suivant des points, des droites et des plans. Nous nous proposons de donner maintenant quelques applications de nature à justifier cette proposition.

Par la même occasion, nous reviendrons sur quelques points du *Traité élémentaire,* soit pour essayer de les présenter plus clairement ou plus simplement, soit pour les compléter. On va voir, d'ailleurs, notre nouveau programme. Il nous semble réaliser pour la Géométrie à quatre dimensions, par la réunion de nos deux petits Volumes, un tout correspondant à celui que font ensemble la *Géométrie élémentaire* et la *Géométrie analytique* enseignées dans les classes.

Comme précédemment, nous nous tiendrons dans la tradition euclidienne et ne supposerons d'autres connaissances que les cours de mathématiques spéciales. Comme précédemment aussi, nous joindrons au texte, autant que possible, des *figures explicatives.* Ces sortes d'illustrations sont difficiles à

réaliser dans les sujets comme celui que nous traitons et, partant, y sont très peu usitées; mais elles apportent au lecteur une aide si efficace qu'elles ne devraient faire reculer ni l'auteur, ni l'imprimeur.

Le PREMIER CHAPITRE pose les axiomes de la Géométrie à quatre dimensions. Ces axiomes, conventions ou définitions, quel que soit le nom qu'on veuille leur donner, se réduisent à deux : la présupposition de *quatre* coordonnées comme définissant *le point isolé,* puis l'axiome dit *de la distance,* qui établit la relation entre *un point et un autre point* et, comme conséquence, entre *des points en nombre quelconque.*

Le CHAPITRE II étudie le singulier système de coordonnées de la Géométrie à quatre dimensions, composé de *quatre droites, six plans et quatre espaces, un quelconque des quatorze éléments étant perpendiculaire à un quelconque des autres, s'il ne le contient pas ou n'y est pas contenu.* Une analyse très simple de leurs relations de position nous fournit la théorie des trois polyédroïdes réguliers qui ont respectivement *huit, seize* et *vingt-quatre* cases polyédrales, et nous représentons ces hypercorps par leurs projections *sur quatre des six plans* du système de coordonnées, formant ensemble ce que nous appelons une *épure de Géométrie descriptive à quatre dimensions.* Dans une pareille épure, les quatre projections peuvent être associées deux à deux de *six manières;* deux de ces couples n'ont de sens que pour le *géomètre à quatre dimensions;* un d'eux suffit pour déterminer l'hypercorps dans l'étendue et résoudre graphiquement tous les problèmes dont il peut être l'objet; chacun des quatre autres couples, pris isolément, constitue une *épure de Géométrie descriptive ordinaire* et représente un polyèdre pareil à ceux

qui nous sont familiers, projection de l'hypercorps sur un espace qu'on peut supposer être le nôtre. On remarquera sans doute, entre autres choses, la simplicité de notre théorie de l'*icosatétraédroïde*, lequel ne passe pas pour être de compréhension facile.

On ne fait que de la Géométrie à deux dimensions dans le CHAPITRE III et que de la Géométrie à trois dimensions dans le CHAPITRE IV. Celui-ci est la continuation de celui-là et le CHAPITRE V est celle de l'un et de l'autre. Ils mettent sur le tapis trois figures respectivement à deux, trois et quatre dimensions, qui semblent tout d'abord n'avoir rien de commun, savoir :

A. La figure formée dans le plan par *quinze droites joignant deux à deux six points d'une conique;*

B. Celle formée dans l'espace par *quinze droites situées trois par trois dans quinze plans;*

C. Celle formée dans l'étendue par *six espaces*. La première figure dérive du célèbre théorème que Pascal découvrit vers 1640, qu'il appela l'*hexagramme mystique,* sur lequel il avait basé un *Traité des sections coniques* qui ne nous est pas parvenu, et autour duquel le XIX^e^ siècle a lentement accumulé un très grand nombre de propositions. On commence à attacher moins de prix à ces longues suites de théorèmes qu'il est quelquefois facile de faire jaillir d'une source commune; mais ici les théorèmes, pour la plupart d'ailleurs peu faciles à démontrer, se juxtaposent à perte de vue sans qu'on aperçoive cette source commune; on a néanmoins le sentiment qu'elle doit exister et que la figure A ne serait qu'*une forme dérivée d'une autre à la fois plus simple et plus générale.*

Il fut fait un premier pas dans la direction de celle-ci quand

on eut découvert la figure B, et qu'on lui eut rattaché la première comme étant sa *projection sur un plan*. Plus tard, on reconnut que la figure B n'est elle-même que la *section faite par un espace* dans la figure C. C'est donc dans l'étendue, car on ne saurait demander plus de simplicité, que réside *la forme* de laquelle émanent la figure B de l'espace et la figure A du plan, et qu'il faut chercher la cause première de leurs multiples propriétés.

Le développement de cette double thèse nous a amenés à exposer la partie la plus importante de la théorie des *surfaces du troisième degré,* pure question de Géométrie à trois dimensions, qui a été très travaillée pendant le dernier demi-siècle, mais que les livres classiques n'osent pas aborder. Nous croyons l'avoir présentée sous une forme des plus accessibles et l'on trouvera peut-être que ce Chapitre que nous ajoutons au bagage ordinaire n'est ni moins intéressant, ni beaucoup plus difficile que ceux qui le composent déjà.

Le Chapitre VI a pour objet de reconnaître le plus rapidement possible et en écartant toutes les questions circonvoisines, les *formes* des *hypersurfaces du second degré,* c'est-à-dire des lieux à trois dimensions, homogènes avec nos volumes, que représente l'équation quadratique entre *quatre* coordonnées. Avec *deux,* cette équation donne naissance à trois types que la Géométrie à deux dimensions appelle l'*ellipse,* l'*hyperbole* et la *parabole*. Avec *trois,* elle donne cinq types généraux, plus deux formes particularisées, dont les noms sont présents à tous nos lecteurs. On verra que la Géométrie à quatre dimensions connaît *quatre formes particularisées,* qui sont des cônes et des cylindres autres que ceux de la Géométrie à trois dimensions, plus *cinq types,* auxquels nous nous sommes dispensé d'imposer des noms, parce qu'il est trop difficile de les apporter à côté de formes connues.

Continuation du précédent, le CHAPITRE VII examine sommairement l'*intersection de deux hyperquadriques,* qui est une *surface* homogène avec les nôtres, en différant toutefois en ce qu'au lieu de se chambrer dans un espace elle se développe dans l'étendue, coupant les espaces suivant des courbes, pendant que les hyperquadriques les coupent suivant des surfaces. Cette surface, appelée *quartique,* parce qu'elle est du quatrième degré, a pour projection sur notre espace la *surface du quatrième degré contenant une conique double,* dont les *tores,* les *cyclides de Dupin* et celles de *Darboux,* pour ne citer que les plus connues, sont des cas particuliers. Elle est, dans l'espace géométrique supérieur, la souche de cette famille de surfaces qui abondent dans le nôtre; elle en synthétise toute la Géométrie et apporte une seconde preuve, de nature tout à fait différente, à la thèse que nous énoncions il y a un instant.

Le mathématicien avait créé l'hyperespace pour son usage personnel et pour un objet déterminé : *Donner une forme géométrique à la théorie des fonctions algébriques de plus de trois variables.* Depuis, on a voulu y voir quelque chose de réel, et notre HUITIÈME CHAPITRE présente quelques-uns des arguments qui ont été mis en avant à l'appui de cette prétention. Ils sont pris successivement dans l'ordre philosophique, dans l'ordre mathématique, dans le monde des atomes et, enfin, chez les agglomérations d'atomes qui s'appellent *des corps;* nous avons choisi dans chacune de ces catégories l'argument qui nous a paru le plus intéressant ou le plus typique et l'avons développé de notre mieux, sans toutefois prendre nous-même position, ni oublier que nous n'écrivons qu'un livre de Mathématiques.

La Philosophie nous a fourni le *principe de non-contradic-*

tion. Avec le mathématicien, nous avons traité la question des *polyèdres symétriques*, qui fait ressortir si nettement la dépendance des champs successifs; elle nous a donné l'occasion de revenir sur la rotation d'un espace et de compléter utilement, en y introduisant la notion de *retournabilité*, les explications qui en ont été données dans le *Traité élémentaire*. Pour le physicien, nous nous sommes attaché à cette espèce d'affinité qui appelle la quatrième dimension dans la plupart des questions où l'atome est intéressé, et nous avons été amené à mettre en scène une science toute neuve encore appelée d'abord la *Chimie dans l'espace* et aujourd'hui la *Stéréochimie;* elle nous a fourni l'argument de l'*atome plurivalent*. Enfin, l'argument de la dernière catégorie est celui des *spirites*. Ce mot, fort étonné sans doute de se voir ici, désigne un public qui a accueilli avec empressement le monde à quatre dimensions, et lui a valu une notoriété que les mathématiciens ne lui eussent jamais faite à eux seuls. C'est que, pour fournir à des intelligences ultra-terrestres un habitat, et à leurs influences réelles ou prétendues les moyens de s'exercer, ce monde fait admirablement l'affaire et par le cachet mystérieux qu'il est facile de lui donner et par la singulière relation de position (1) que la Géométrie établit entre lui et nous, et par la vaste carrière qu'il ouvre au travail de l'imagination. La plus belle peinture que nous connaissions de l'*Immensité* est celle que fait Jean Reynaud dans *Terre et Ciel,* pages 234, 248, 291, ..., etc. (2); combien il l'aurait faite à la fois plus grandiose et plus naturelle sur la donnée des champs successifs!

---

(1) Elle est décrite dans le *Traité élémentaire*, § 49, et dans le présent Ouvrage, pages 192 et suivantes.

(2) Furne, 3e édition, 1858.

Il ne nous convient pas d'entrer dans cet ordre d'idées. Mais il nous a paru intéressant de lui consacrer quelques pages montrant les arguments *spéciaux* que ses adeptes apportent à l'appui de l'hyperespace; la question est capitale pour eux s'ils veulent faire usage de la quatrième dimension, car ils ont besoin qu'elle soit réelle, tandis que cette réalité n'est pas plus nécessaire au physicien qu'au mathématicien.

Un important Ouvrage a paru depuis notre premier livre : *Mehrdimensionale Geometrie,* par M. Schoute, de Groningue (1). Fait à un point de vue mathématique plus large que le nôtre, plus méthodique dans son cours, entrant davantage dans les questions, il ne saurait être remplacé par celui-ci; nous croyons toutefois qu'il peut en recevoir d'utiles compléments ou éclaircissements. Mentionnons encore un agréable petit livre paru dans la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine* (2). Enfin on annonce un Ouvrage qui ne peut manquer d'avoir une très grande valeur, par M. Segre, de Turin (3).

---

(1) Librairie Göschen, à Leipzig.

(2) *Essai sur l'hyperespace, le temps, la matière et l'énergie,* par Maurice Boucher. Paris, 1903.

(3) *Vorlesungen über algebraische Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Geometrie.* Teubner, à Leipzig.

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

CHAPITRE I.

COUP D'ŒIL SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

§ 1. — Premier axiome définissant le point isolé.

Le mathématicien emploie sur une vaste échelle le procédé qui consiste à représenter par un point du plan un système de valeurs de deux variables x_1, x_2, ou inversement. Il y a bien des manières d'établir cette correspondance, analogue à celle qui existe entre deux facteurs et leur produit: la plus simple et la plus usuelle est la Géométrie cartésienne.

Comme chaque valeur d'une des variables peut s'associer à une valeur quelconque de l'autre, et que l'une et l'autre en ont un nombre infini, le système (x_1, x_2) forme une multiplicité deux fois infinie (1), ou de l'ordre ∞^2; on dit de même que le plan est une *multiplicité de points* deux fois infinie, ou de l'ordre ∞^2. Sans chercher plus loin, *nous constatons* cette adaptation comme un fait intuitif.

Dans la Géométrie à trois dimensions, *on constate* une correspondance de même nature entre les points de l'espace et les

(1) Selon l'usage, nous prenons le mot *deux fois infini*, ou *double infinité*, dans le sens ∞^2 (et non 2∞). Quant au mot *multiplicité*, il a été défini dans le *Traité élémentaire*, § 8; on peut voir son histoire dans STALLO, *La matière et la Physique moderne*, p. 202.

valeurs de trois variables x_1, x_2, x_3, et l'on dit que l'espace est, comme celle-ci, *une multiplicité de l'ordre* ∞^3.

La Géométrie à quatre dimensions *admet, par analogie,* qu'il correspond aussi un être géométrique déterminé à tout système de valeurs de quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 et elle donne à cet être géométrique le nom de *point*. L'ensemble de tous les points correspondant à toutes les valeurs des quatre variables forme comme elles une *multiplicité de l'ordre* ∞^4, et est considéré comme un lieu géométrique appelé l'*étendue*. Quand on considère des points qui *ne remplissent pas* l'étendue, c'est-à-dire, ou sont *en nombre fini,* ou forment une multiplicité d'*ordre* ∞^1 (les lignes), ou une d'*ordre* ∞^2 (les surfaces), ou une d'*ordre* ∞^3 (les hypersurfaces ou volumes), on a *une figure existant dans l'étendue*.

On trouve souvent commode de considérer les variables comme des longueurs et le point, dans la Géométrie à deux dimensions, comme une fraction infiniment petite d'une unité de surface, qui est le mètre élevé à la seconde puissance, ou le *mètre carré;* dans celle à trois, comme une fraction infiniment petite d'une unité de volume, qui est le mètre élevé à la troisième puissance ou le *mètre cube*. Dans la Géométrie à quatre dimensions, on le considère de même comme une fraction infiniment petite d'*une chose* qui est au *volume* ce que celui-ci est à l'*aire,* ce que celle-ci est à la *longueur,* et qu'on appelle l'*hypervolume;* et l'unité à laquelle on rapporte cette chose est le *mètre élevé à la quatrième puissance*.

Mais le point, ce premier élément des figures étudiées par le géomètre, cet élément qui remplit pour lui le rôle de l'atome pour le chimiste, n'est pas nécessairement le produit de *deux, trois* ou *quatre* différentielles d'une longueur. De même que le chimiste peut supposer à son atome une grosseur et une constitution quelconques, de même le point peut être conçu de mille façons dépendant de la signification que le géomètre attribuera aux variables auxquelles il la fait correspondre. Ces diverses manières, assujetties à une condition que nous avons formulée § 19 du *Traité élémentaire,* lui ouvrent les horizons les plus variés et, parfois, les plus inattendus : le *point* n'est plus un point; c'est, à volonté, une droite, un plan, une sphère, un es-

pace, une hypersphère, etc. Plücker, Lie et Darboux se sont illustrés dans des spéculations de ce genre.

Dans tous les cas, nous donnons le nom de *coordonnées* aux deux, trois ou quatre variables qui définissent le point. Lorsqu'une autre espèce n'aura pas été spécifiée, ce seront des coordonnées cartésiennes, lesquelles supposent l'existence d'*axes coordonnés;* et nous appellerons, comme d'habitude, *axes des* x_i le lieu des points dont les coordonnées autres que x_i ont la valeur *zéro.*

§ 2. — Deuxième axiome établissant la relation entre points différents.

Dans le *plan,* comme dans l'*espace,* un point donné peut être *déplacé :* on appelle ainsi toute *opération* ayant pour résultat de remplacer les valeurs x de ses coordonnées par d'autres valeurs ξ. Des points en nombre quelconque peuvent être déplacés simultanément et l'on dit qu'ils font partie d'une *figure rigide* quand ils conservent invariablement les mêmes positions relatives. *On démontre* qu'il existe alors, pour *deux* quelconques de ces points, une fonction de leurs coordonnées qui ne change pas dans leur mouvement; c'est la somme Δ^2 des carrés des différences entre les coordonnées de même nom. Cet invariant, qui est un *binome* dans la Géométrie à deux dimensions, un *trinome* dans celle à trois, est le carré d'une grandeur linéaire qu'on appelle la *distance des deux points.*

Étendant à la Géométrie à quatre dimensions la notion d'une figure rigide, *nous admettrons* que la fonction analogue, qui est maintenant un *quadrinome,* savoir :

$$\Delta^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 + (x_4 - \xi_4)^2,$$

jouit encore de la propriété d'invariance dans le déplacement d'une pareille figure, et nous appellerons encore sa racine carrée la *distance des deux points* (1).

Dans un travail publié en 1887 (2), M. Poincaré, ne considé-

(1) La fonction invariante la plus générale contient en outre quatre grandeurs angulaires arbitraires, auxquelles, pour simplifier, nous attribuons ici la valeur 90°.

(2) *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie* (*Bull. de la Soc. math. de France,* t. XV, p. 203-215).

rant que la Géométrie à deux dimensions, ramène la question des axiomes à la *théorie des groupes continus* en admettant que, dans toute série de déplacements d'une figure rigide, le résultat de deux déplacements successifs quelconques peut être réalisé par un seul déplacement faisant partie de la série. Le travail de M. Poincaré a été étendu tout récemment par M. Lovett au cas de n dimensions (1).

§ 3. — Les champs.

Partant du point, on s'élève de proche en proche aux termes suivants, qui représentent chaque fois le *champ* ouvert à l'activité du géomètre, quand il ne connaît que une, deux, trois ou quatre coordonnées.

Le premier champ est la *droite,* multiplicité infinie du premier ordre. Un des points constituants, qui ne laisse pas que d'avoir certains caractères propres, mais est en continuité avec les autres comme ils le sont entre eux, s'appelle le *point de l'infini de la droite.*

Le deuxième champ est le *plan,* contenant une double infinité de points. Il contient aussi une double infinité de droites, mais n'a cependant qu'une droite à l'infini, lieu des points à l'infini de toutes les autres droites. Sa géométrie a pour objet les configurations de toute espèce qu'on y peut faire avec le point et la droite. — Dans le champ, le nombre des *degrés de liberté* d'une figure rigide est *trois,* c'est-à-dire que trois choses indépendantes y sont nécessaires et suffisantes pour fixer la position de la figure; il y a en effet trois mouvements indépendants possibles : deux translations suivant deux axes et une rotation autour d'un point.

Le troisième champ est l'*espace*, contenant une triple infinité de points. Il contient aussi une triple infinité de plans, dont un s'appelle le *plan de l'infini :* c'est le lieu des points à l'infini de toutes les droites et des droites à l'infini de tous les plans. Sa géométrie a pour objet les configurations de toute sorte qu'on y peut faire avec le point, la droite et le plan. — Les mouvements

(1) *Sur la Géométrie à n dimensions* (*Journal de Liouville,* 1901, p. 259-303).

possibles d'une figure rigide y sont au nombre de *six* : translations suivant trois axes et rotations autour de trois axes.

Le quatrième champ est l'*étendue,* contenant quatre infinités de points. Il contient aussi quatre infinités d'espaces, dont un s'appelle l'*espace de l'infini* : c'est le lieu des points à l'infini de toutes les droites, des droites à l'infini de tous les plans, des plans à l'infini de tous les espaces. Ce champ est le théâtre des spéculations concernant le point, la droite, le plan et l'espace, et sa géométrie a pour objet les configurations de toute espèce qu'on peut faire avec ces quatre sortes d'êtres géométriques. Une figure rigide y a *dix* mouvements possibles : quatre translations suivant quatre axes et six rotations autour de six plans.

§ 4. — Coordonnées générales et coordonnées surabondantes.

Sur ces bases, la Géométrie à quatre dimensions se développe, comme ses devancières, en établissant successivement entre les points, droite, plans et espaces qui peuplent son champ, les relations de distances, d'intersections, d'angles, etc. Sans revenir sur cette suite de déductions, qui remplit les premières pages du *Traité élémentaire,* il nous paraît utile de détacher de celles-ci ou d'y ajouter les considérations suivantes :

1° Deux espaces ont pour intersection un plan, trois une droite, et quatre un point. Quand deux plans sont dans un même espace, le régime de leurs intersections, de leurs angles ... est le même que dans la Géométrie à trois dimensions. Mais cette position n'est plus maintenant qu'un *cas particulier;* dans le cas général, l'intersection des deux plans est *un point,* qui est le point d'intersection des quatre espaces dont deux déterminent un des plans, et deux l'autre. De là résultent de tout autres conditions pour le parallélisme, la perpendicularité et l'inclinaison de ces plans. Rappelons-les en trois mots; ce point fondamental est aussi un des plus curieux de la Géométrie qui nous occupe.

Si l'on mène par le point d'intersection une droite quelconque dans un des deux plans et une droite quelconque dans l'autre, les deux droites font ensemble, puisqu'elles ne peuvent pas avoir d'autre point commun, un angle qui ne descend pas jusqu'à 0°, ni ne monte jusqu'à 180°. Il comporte donc un minimum φ et un

maximum ψ, qui sont les racines d'une équation du second degré et qu'on appelle *les angles des deux plans*. L'un d'eux ne peut devenir nul, que si les deux droites considérées plus haut n'en font qu'une; on dit alors que les deux plans sont *demi-parallèles* et ils se coupent suivant une droite située à distance finie ou infinie; à moins d'avoir ce dernier cas, on ne peut mener dans chaque plan qu'une seule droite parallèle à l'autre. Les deux plans sont (*complètement*) *parallèles* quand les deux angles sont nuls, le point d'intersection étant passé à l'infini; alors une droite quelconque de l'un d'eux est parallèle à l'autre. — On dit de même que les deux plans sont *demi-perpendiculaires* quand un des angles est égal à 90°, et (*complètement*) *perpendiculaires* quand ils le sont tous les deux; dans le second cas, une droite quelconque de l'un des plans est perpendiculaire à l'autre, dans le premier il n'y a dans chaque plan qu'une seule direction jouissant de cette propriété. Enfin on dit que les deux plans *sont à angles égaux* quand $\varphi = \psi$; alors, l'un des plans étant donné, ainsi que le point commun et la valeur de l'angle, le second est susceptible d'une infinité de positions dont le lieu est un hypercône du second degré.

2° Au lieu de définir un point par ses quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, on peut le définir par quatre équations linéaires entre ces coordonnées. L'espace, le plan, la droite et le point sont alors représentés comme ceci :

$$(1) \qquad A = 0; \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 0; \end{cases}$$

les polynomes A, B, C, D s'appellent les *coordonnées générales* du point.

3° Si, dans ces systèmes, il y a m variables de plus

$$x_5, \quad x_6, \quad \ldots, \quad x_4 + m$$

et en même temps *nombre égal* d'équations de plus

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad \ldots,$$

ils ont toujours la même signification, c'est-à-dire représentent encore, respectivement, un espace, un plan, une droite, un point. On dit alors que ceux-ci sont exprimés en *coordonnées surabondantes*.

4° Retenons un instant le second système

$$A = 0, \qquad B = 0. \tag{2}$$

Il représente : — un point, quand A et B contiennent deux variables et qu'on fait de la Géométrie à deux dimensions ; — une droite, quand ils en contiennent trois et qu'on fait de la Géométrie à trois dimensions ; — un plan, quand ils en contiennent quatre et qu'on fait de la Géométrie à quatre dimensions. La combinaison linéaire des deux équations, savoir

$$A + \beta B = 0, \tag{3}$$

β étant une indéterminée, représente, dans le premier cas, un faisceau de droites rayonnant dans le plan autour du *point* (2); dans le deuxième, un faisceau de plans rayonnant dans l'espace autour de la *droite* (2); dans le troisième, un faisceau d'espaces rayonnant dans l'étendue autour du *plan* (2); le mot *faisceau* désignant, dans tous les cas, une multiplicité ∞^1, ou de premier ordre.

On dit aussi, dans le premier cas, que c'est une seule et même droite qui *tourne dans le plan* autour du point (2); dans le deuxième, que c'est un seul et même plan qui *tourne dans l'espace* autour de la droite (2); dans le troisième, que c'est un seul et même espace qui *tourne dans l'étendue* autour du plan (2). C'est ainsi que les mots *tourner* et *rotation* changent de signification quand on passe d'un champ au suivant.

Il résulte de là un procédé qui facilite souvent le passage : vous augmentez d'une unité le *degré* de chacun des éléments *point, droite* et *plan,* ce qui amène à leur place les éléments *droite, plan* et *espace;* quant au point, il apparaît dans la nouvelle figure comme *élément nouveau,* n'ayant pas de correspondant dans l'ancienne.

5° On a souvent avantage à remplacer les coordonnées x_1, x_2,

x_3, x_4 par leurs rapports à une cinquième variable x_5 : lorsqu'on a chassé les dénominateurs, les équations auxquelles on a affaire sont *homogènes* et plus maniables à raison de leur symétrie. Les cinq plans

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0$$

forment le *pentaèdre des coordonnées,* et le point dont les cinq coordonnées sont égales entre elles s'appelle le *point-unité* du système.

CHAPITRE II.

LE SYSTÈME DE COORDONNÉES ET LES TROIS PREMIERS POLYÈDRES RÉGULIERS.

§ 5. — Le quadrièdre droit.

I. — Le quadrièdre droit simple.

Par un point O menons *quatre droites perpendiculaires entre elles*

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

que nous appellerons *les axes*. Ce sont précisément nos *quatre dimensions,* et c'est *la possibilité de faire cette opération* qui caractérise la Géométrie dont nous nous occupons, de même que celle de mener par un point O *deux, trois,* ou *n* perpendiculaires caractérise les Géométries à *deux, trois* ou *n* dimensions.

Ne considérons d'abord que *les moitiés* des axes qui sont situés d'un certain côté du point O, et que nous appellerons leurs *directions positives*. Prises *deux à deux,* elles déterminent six plans et forment six angles droits que nous groupons par deux comme ceci :

$$x_1x_2 \text{ et } x_3x_4, \quad x_1x_3 \text{ et } x_2x_4, \quad x_1x_4 \text{ et } x_2x_3;$$

dans chacun de ces trois couples, les quatre indices sont différents et les deux plans sont *absolument perpendiculaires* entre eux, c'est-à-dire n'ont de commun que le *point* O; dans tous les autres couples qu'on peut former au nombre de *douze,* il ne figure que trois indices, un d'eux étant répété, les deux plans ne sont plus qu'en *perpendicularité simple,* et leur intersection est une *droite*. Pris *trois à trois,* les quatre demi-axes forment

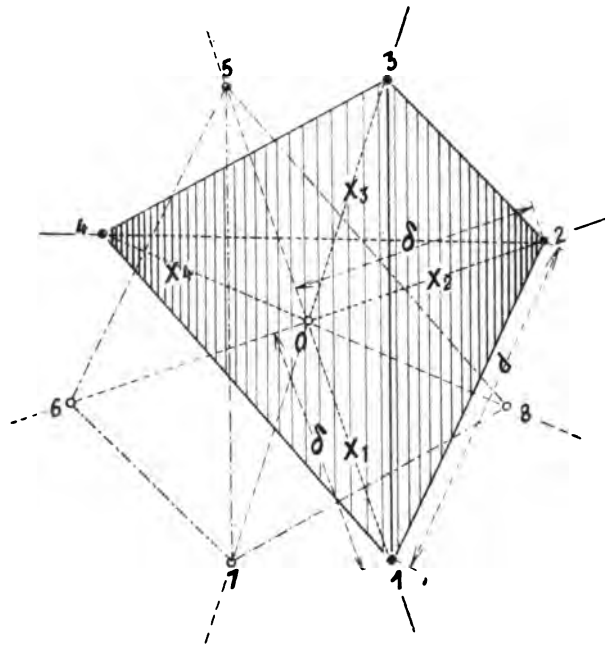
quatre trièdres trirectangles et autant d'espaces :

$$x_1x_2x_3, \quad x_2x_3x_4, \quad x_3x_4x_1, \quad x_4x_1x_2.$$

Nous appellerons cet ensemble un *quadrièdre droit*. La considération suivante en fera bien comprendre la constitution, moins simple peut-être qu'elle ne le paraît.

Portons (*fig.* 1) sur chacun des quatre demi-axes, à partir du

Fig. 1.



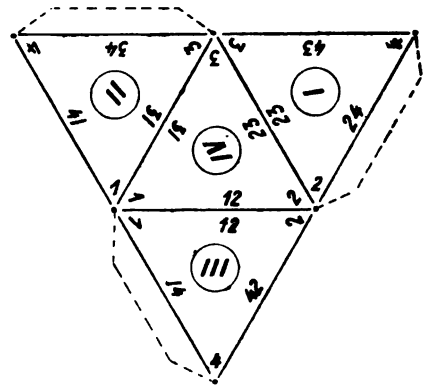
Le tétraèdre terminal du quadrièdre droit $x_1x_2x_3x_4$ et son opposé.

point O, une même longueur δ; coupons-les à cette distance et rejetons les parties restantes, qui iraient de $x = \delta$ à $x = \infty$. Les points terminaux 1, 2, 3, 4 forment un tétraèdre régulier : un *tétraèdre,* parce qu'ils sont au nombre de quatre, et un *tétraèdre régulier* parce que les six arêtes ont une même longueur d, étant les hypoténuses de *triangles rectangles isoscèles égaux*. Cette longueur est

$$d = 12 = 34 = 13 = 24 = 14 = 23 = \delta\sqrt{2}.$$

Transportons-nous dans l'espace de ce tétraèdre. Fendons-le suivant les arêtes 14, 24, 34, puis rabattons sur le plan de la face 123 les trois faces séparées ainsi. Nous aurons la figure 2, où une *languette* a été ajoutée le long des côtés de chacun des trois triangles extérieurs I, II, III afin qu'ayant découpé le pourtour, le lecteur, s'il veut construire le tétraèdre, n'ait qu'à faire tourner chaque triangle sur le côté qui lui est commun avec le

Fig. 2.



Développement du tétraèdre terminal.

triangle central IV (1) et coller chaque languette sous la face contre laquelle elle vient s'appliquer.

Faisons d'autre part quatre trièdres droits I, II, III, IV; marquons leurs arêtes et leurs faces comme le montre la figure 3, où les *indices* des lettres x correspondent aux numéros de la figure 1; puis appliquons sur les faces

$$x_2x_3, \quad x_3x_1, \quad x_1x_2$$

du trièdre IV les faces qui ont la même marque sur les trièdres

I, II, III.

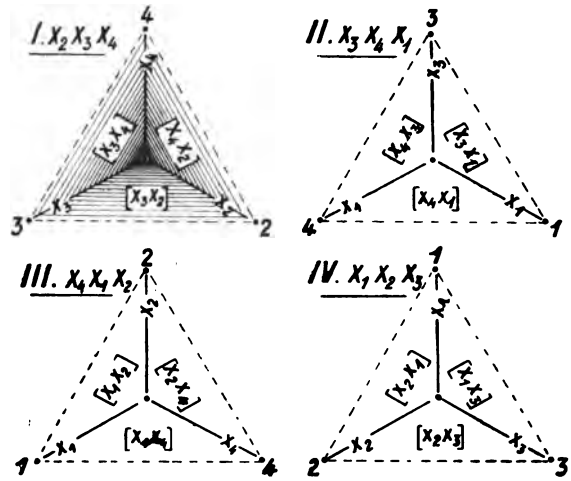
Nous aurons formé une configuration qui a trois plans doubles

(1) Il faut au préalable *creuser les plis* avec le tranchant d'un couteau à papier.

et six plans simples, et qui *remplit la moitié de l'espace* où nous avons élu domicile (1).

Jusqu'ici tout s'est passé dans cet espace, et la *configuration* I, II, III, IV est *préparée* sous la forme d'un *développement spatial*

Fig. 3.



Les quatre trièdres trirectangles constitutifs du quadrièdre droit $x_1 x_2 x_3 x_4$.

comme la figure 2 l'est sous la forme d'un *développement plan*. Il faut maintenant (*voyez* le § 29 dans le Chapitre VII ci-après) faire tourner chacun des espaces I, II, III autour du plan qui lui est commun avec l'espace IV jusqu'à ce que *les faces qui ont la même marque s'appliquent l'une sur l'autre,* et alors *les arêtes qui ont la même marque s'appliqueront aussi l'une sur l'autre.*

---

(1) Si l'on en construit une deuxième toute pareille, I', II', III', IV', on pourra es engager l'une dans l'autre en juxtaposant ainsi leurs faces simples

$x_1 x_4$ de I et $x_2 x_4$ de I', $x_2 x_4$ de I et $x_1 x_4$ de III', $x_3 x_4$ de I et $x_1 x_4$ de II'.
$x_1 x_4$ de II et $x_3 x_4$ de I', $x_3 x_4$ de II et $x_3 x_4$ de II',
$x_2 x_4$ de III et $x_2 x_4$ de III'.

On aura alors une configuration formée de *trois plans doubles* et *remplissant l'espace entier autour du point* O; elle le partage en huit trièdres trirectangles, dont quatre se trouvent de chaque côté de chaque plan.

Le quadrièdre droit sera constitué avec ses quatre sortes de figures limitantes : *un point, quatre arêtes, six faces planes* et *quatre trièdres,* respectivement de degrés 0, 1, 2, 3, les trois dernières correspondant aux sommets, arêtes et faces du tétraèdre, lesquelles sont respectivement de degrés 0, 1, 2.

II. — Le quadrièdre droit complet.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que la direction *positive* des quatre axes x_1, x_2, x_3, x_4. Restituons-leur les directions négatives et marquons sur celles-ci, à la même distance δ, les points 5, 6, 7, 8 respectivement symétriques de 1, 2, 3, 4.

Un quelconque des huit *points numérotés* que nous avons maintenant est à la distance d d'un quelconque des autres, sauf les deux qui se trouvent sur un même axe, et qui sont à la distance $2d$ l'un de l'autre : savoir 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8. On peut les associer de *seize* manières différentes quand on s'interdit celle où ces couples se trouveraient. Par exemple, partant du groupement 123, on ajoutera 4 ou 8, ce qui donne *deux* combinaisons; dans chacune, on remplace 3 par 7, ce qui en ajoute deux et fait *quatre;* dans chacune de celles-ci, on remplace 2 par 6, ce qui en ajoute quatre et fait *huit;* enfin, dans ces dernières, on remplace 1 par 5, ce qui en ajoute huit et fait *seize.*

Ces seize associations

1234,	1238,	1274,	1278,
1634,	1638,	1674,	1678,
5234,	5238,	5274,	5278,
5634,	5638,	5674,	5678

représentent *autant de tétraèdres réguliers situés dans autant d'espaces différents.* Chacun d'eux a *une* face commune avec un des autres et ils forment tous ensemble un solide régulier à quatre dimensions qui sera étudié dans le paragraphe suivant. Or, de même que le tétraèdre 1234, qui est le premier du Tableau, est le *couvercle* d'un quadrièdre droit ayant son sommet en O, de même chacun des autres est le couvercle d'une figure pareille. *L'étendue est donc partagée autour du point* O *en seize quadrièdres droits,* dont chacun a un de ses trièdres commun avec

un des autres. Huit trièdres sont dans chacun des quatre espaces $x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_4$, $x_3x_4x_1$, $x_4x_1x_2$, chacun d'eux étant commun à deux espaces.

Tel est le système de coordonnées de la Géométrie à quatre dimensions. Constitué dans celle à deux par ***deux droites*** qui découpent le plan en ***quatre angles droits,*** dans celle à trois par ***trois plans*** qui partagent l'espace en ***huit trièdres droits,*** il l'est maintenant par ***quatre espaces*** qui divisent l'étendue en ***seize quadrièdres droits.*** Si, pour compléter la série, nous plaçons à sa tête la ***droite simple,*** considérée comme l'axe unique x_1 de la ***Géométrie à une dimension,*** nous voyons que les systèmes de coordonnées

$$x_1\,;\quad x_1,\ x_2\,;\quad x_1,\ x_2,\ x_3\,;\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

des quatre Géométries successives équivalent respectivement à : une table ordinaire, par exemple celle des logarithmes des nombres, — une table à double entrée, par exemple celle de Pythagore, — une table à triple entrée, — une table à quadruple entrée. Dans les deux premiers cas, la table numérique peut être remplacée par un graphique, mais les deux derniers ne sauraient être posés sur un plan comme celui de la présente feuille d'impression ; on leur applique des procédés graphiques spéciaux qui font l'objet de la *Nomographie* (1).

Si l'on fait $\delta = \infty$, les deux points opposés situés sur chacun des quatre axes se réduisent à un, les huit points à quatre et les seize tétraèdres réguliers ***à un seul.*** Ainsi ***le système des coordonnées est coupé par l'espace de l'infini suivant un tétraèdre régulier.*** La considération de ce tétraèdre est souvent utile.

§ 6. — Les plans de projection.

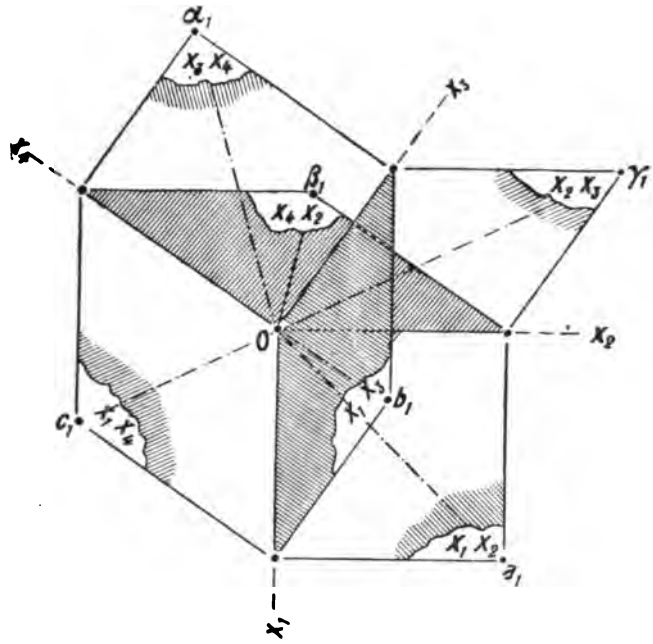
Pour faire plus ample connaissance avec le système des coordonnées, considérons-y (*fig.* 4) les trois couples de plans abso-

(1) *Voir* D'OCAGNE, *Exposé synthétique des procédés fondamentaux de la Nomographie.* Paris, in-4°, 1903.

lument perpendiculaires entre eux

$$x_1x_2,\ x_3x_4;\quad x_1x_3,\ x_2x_4;\quad x_1x_4,\ x_2x_3$$

Fig. 4.



Les parties positives des six plans coordonnés.

que nous désignerons dans la suite de ce Chapitre plus brièvement par

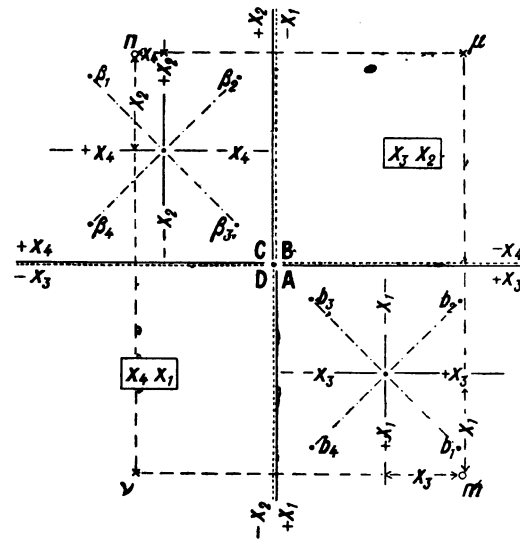
$$a,\ \alpha;\quad b,\ \beta;\quad c,\ \gamma.$$

Toute figure de l'étendue est définie par ses projections sur les deux plans d'un même couple, puisque ces projections donnent à elles deux les quatre coordonnées d'un point quelconque. On est libre de prendre le couple que l'on voudra, et les faces de la question que l'on étudie peuvent faire préférer tour à tour l'un et l'autre; par des raisons de symétrie, choisissons celui du milieu, $b\beta$, et nous l'*emploierons exclusivement*.

Détachons des autres les deux plans qui les composent et couchons-les ensemble (*fig.* 5) sur la présente feuille de papier.

Si nous superposons leurs axes, nous aurons les deux lignes perpendiculaires placées au milieu de la feuille, où les directions positives sont dessinées en traits pleins et les négatives en traits pointillés. Mais, dans une pareille disposition, les figures que

Fig. 5.



Transport du système de coordonnées.

contiennent l'un et l'autre des deux plans se recouvriraient et se confondraient. Nous transporterons donc le plan $x_1 x_3$ vers *le bas et la droite,* le plan $x_2 x_4$ vers *le haut et la gauche,* assez loin pour que les figures que nous aurons à tracer dans chacun d'eux ne sortent pas de l'angle A ou C qui leur est attribué. Étant donnés alors deux points quelconques *m* et *n* comme étant les projections d'un point M de l'étendue, on en déduit ainsi que le montre la figure les coordonnées x_1 et x_3, x_2 et x_4 de celui-ci, et réciproquement.

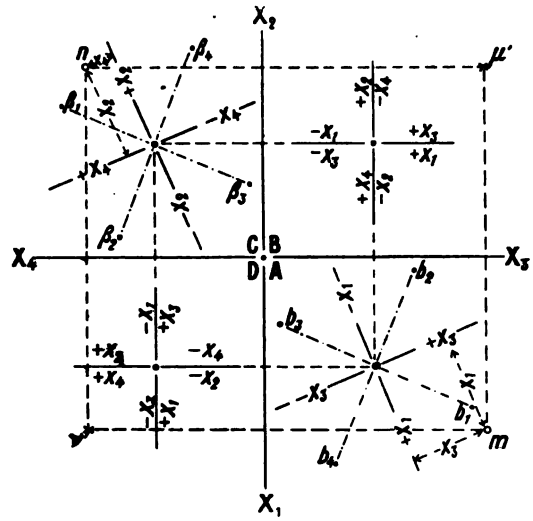
Quant aux angles B et D, nous les considérons comme représentant, couchés aussi sur notre feuille, deux plans *en perpendicularité simple* avec nos deux plans A et C, le premier B étant coupé par eux suivant les lignes x_3 et x_2, le second D suivant les

lignes x_1 et x_4. Dès lors chacun des systèmes

AB, BC, CD, DA,

considéré séparément, n'est autre chose qu'*une épure de Géo-*

Fig. 6.



Relation du système de coordonnées.

métrie descriptive ordinaire où ces quatre lignes x_3, x_2, x_4, x_1 jouent le rôle de *ligne de terre*. Ces quatre systèmes sont dans autant d'espaces différents. Nous considérerons comme étant *notre propre espace* celui qui contient le premier et qui est défini par les trois axes x_1, x_2, x_3; si l'on ne s'occupe que des points, lignes et surfaces qui s'y trouvent, on fait de la Géométrie descriptive ordinaire, ou de la Géométrie à trois dimensions, suivant qu'on procède par la méthode graphique ou par la méthode analytique.

L'ensemble de la figure 5 correspond aux quatre plans

x_1x_3 et x_2x_4, x_3x_2 et x_4x_1, ou b et β, c et γ,

de la figure 4 (1). Les projections μ et ν du point m sur les deux

(1) Les notations A, B, C, D sont respectivement équivalentes à b, c, β, γ; on voudra bien excuser ce double emploi, qui n'est pas tout à fait involontaire.

plans accessoires s'obtiennent par les lignes de rappel, perpendiculaires aux lignes de terre, qui sont si abondantes dans beaucoup d'épures et se tracent d'ordinaire en *traits interrompus*.

On n'oubliera pas : — 1° que tous les points situés dans un même espace perpendiculaire à un plan de projection se projettent *sur une seule et même droite* de celui-ci, qu'on appelle la *projection de l'espace considéré;* ainsi l'axe x_1 est la projection de l'espace $x_1x_3x_4$ sur le plan x_1x_2 et l'axe x_2 celle de l'espace $x_2x_3x_4$; ainsi encore on verra plus loin des tétraèdres, des cubes et des octaèdres ayant pour projection *un fragment de droite;* — 2° que tous les points situés dans un même plan absolument perpendiculaire au plan de projection se projettent sur *un seul et même point,* qui est l'intersection des deux plans : ainsi le plan x_3x_4, intersection de deux espaces $x_1x_3x_4$ et $x_2x_3x_4$, et *toutes les figures* situées dans ce plan ont pour projection commune sur le plan x_1x_2 un point unique, l'origine des coordonnées.

§ 7. — Les vingt-quatre sommets.

I. Dans chacun des six plans coordonnés, traçons *les bissectrices des axes* et marquons un point sur chacune d'elles de part et d'autre de l'origine, à la distance d, cette lettre conservant la même signification que dans le paragraphe précédent. Cela fait en tout

$$6 \times 2 \times 2 = 24$$

points, que nous appellerons *les vingt-quatre sommets.* Nous désignerons les quatre points du plan b par cette même lettre b affectée des indices 1, 2, 3, 4 comme le montre la figure 5, et nous ferons de même dans chacun des cinq autres plans. En ayant égard à la formule de la page 3, qui donne

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,d,$$

on voit que *les vingt-quatre sommets ont tous deux coordonnées nulles et deux coordonnées égales à* δ *en valeur absolue.* Le détail en est donné dans le Tableau suivant; pour abréger et aussi pour faciliter la tâche de l'imprimeur nous avons *ôté* du Tableau la

lettre δ qui y serait répétée *quatre-vingt-seize fois;* le lecteur voudra bien la réintégrer mentalement à la suite de chaque signe + ou —.

TABLEAU I. — COORDONNÉES DES VINGT-QUATRE SOMMETS.

COORDONNÉES.	PREMIER COUPLE. PLAN DES x_1x_2.				PREMIER COUPLE. PLAN DES x_3x_4.				DEUXIÈME COUPLE. PLAN DES x_1x_3.				DEUXIÈME COUPLE. PLAN DES x_2x_4.				TROISIÈME COUPLE. PLAN DES x_1x_4.				TROISIÈME COUPLE. PLAN DES x_2x_3.				COORDONNÉES.
	a_1.	a_2.	a_3.	a_4.	α_1.	α_2.	α_3.	α_4.	b_1.	b_2.	b_3.	b_4.	β_1.	β_2.	β_3.	β_4.	c_1.	c_2.	c_3.	c_4.	γ_1.	γ_2.	γ_3.	γ_4.	
x_1	+	—	—	+	0	0	0	0	+	—	—	+	0	0	0	0	+	—	—	+	0	0	0	0	x_1
x_2	0	0	0	0	+	+	—	—	0	0	0	0	+	—	—	+	+	+	—	—	0	0	0	0	x_2
x_3	0	0	0	0	+	—	—	+	+	+	—	—	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	—	—	x_3
x_4	+	+	—	—	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	—	—	0	0	0	0	+	—	—	+	x_4

Rien n'est plus facile, au moyen de ce Tableau, que de figurer les projections des vingt-quatre sommets sur les quatre plans de l'épure figure 5, mais nombre de projections tomberont les unes sur les autres et la figure sera peu facile à comprendre.

Pour les *séparer,* commençons par *faire tourner sur lui-même, d'un quart de quadrant,* chacun des plans x_1x_3 et x_2x_4, ce qui remplace la figure 5 par la figure 6, page 17 (1). C'est alors comme si les vingt-quatre points, censés faire partie d'un corps solide, avaient exécuté une petite pirouette dans l'étendue, et *tous les sommets deviennent distincts dans les projections sur les plans intermédiaires c et* γ. Ces projections deviennent ainsi nos *figures principales,* et c'est leur réalisation qui sera visée pour les hypercorps faisant l'objet des paragraphes suivants.

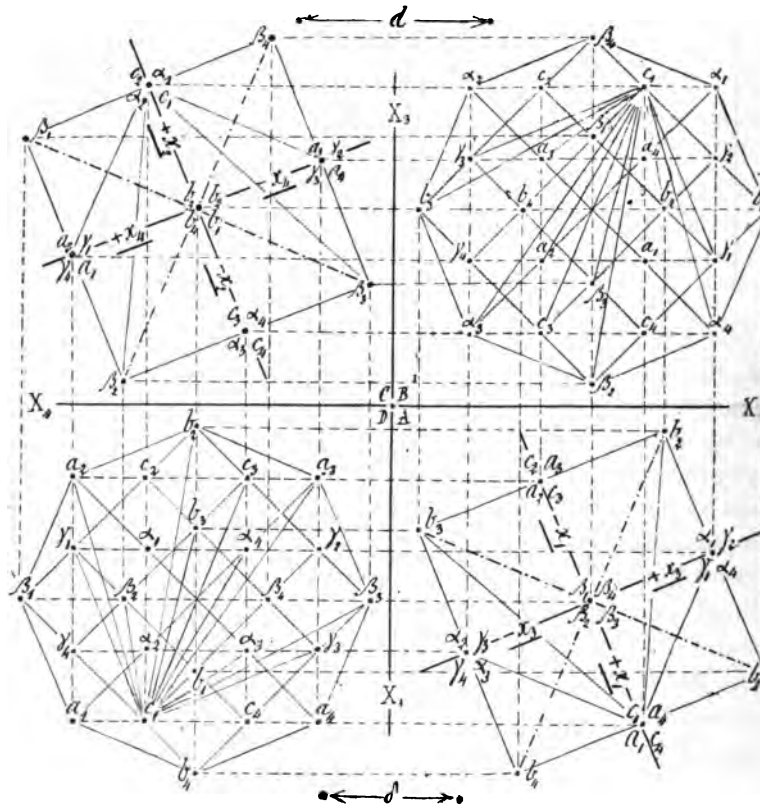
II. — LES QUATRE ESPÈCES DE DISTANCES.

Si l'on joint à tous les autres un quelconque des vingt-quatre sommets, par exemple c_1, on trouve *quatre sortes de distances,* car le remplacement des x et des y dans la formule Δ^2 du paragraphe 2

(1) On a représenté sur les plans B et D de la figure 6 les projections des quatre axes après leur seizième de rotation.

par des valeurs telles que o, o, $\pm\delta$, $\pm\delta$ peut donner, pour chacune des différences à élever au carré, o, ou δ, ou 2δ, et la somme des carrés peut être $2\delta^2$, ou $4\delta^2$, ou $6\delta^2$, ou $8\delta^2$. La figure 7 montre ces diverses distances, et l'on trouve, partant du

Fig. 7.



Les vingt-quatre sommets.

point c_1 : *huit* distances qui ont la valeur d, savoir :

$$c_1a_1, \quad c_1\alpha_1, \quad c_1b_1, \quad c_1\beta_1, \quad c_1a_4, \quad c_1\alpha_4, \quad c_1b_4, \quad c_1\beta_4;$$

six qui ont la valeur $d\sqrt{2}$:

$$c_1c_2, \quad c_1c_4, \quad c_1\gamma_1, \quad c_1\gamma_2, \quad c_1\gamma_3, \quad c_1\gamma_4;$$

huit qui ont la valeur $d\sqrt{3}$:

$$c_1a_2,\quad c_1a_3,\quad c_1b_2,\quad c_1b_3,\quad c_1\alpha_2,\quad c_1\alpha_3,\quad c_1\beta_2,\quad c_1\beta_3;$$

une qui a la valeur $d\sqrt{4} = 2d$:

$$c_1c_3.$$

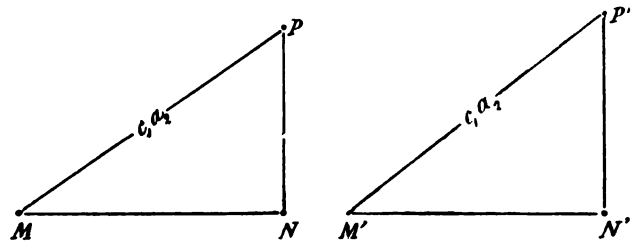
De pareils groupes existent, bien entendu, pour chacun des vingt-quatre sommets; cela fait pour l'ensemble, en multipliant ces nombres par 24 et divisant par 2 pour que chaque droite ne soit pas comptée deux fois :

96	droites de longueur	d	total : 276.
72	»	$d\sqrt{2}$	
96	»	$d\sqrt{3}$	
12	»	$2d$	

Les douze dernières, dont les extrémités ont des coordonnées égales et de signes contraires, s'appellent *les grandes diagonales.* Nous retrouverons plus loin les quatre groupes, chacun avec un rôle particulier.

Le lecteur qui voudrait faire une vérification graphique des valeurs précédentes, par exemple pour les deux points marqués c_1 et a_2, n'a qu'à construire un triangle rectangle (*fig.* 8) ayant pour

Fig. 8.



Construction de la distance de deux points.

côtés la distance MN des deux points marqués c_1 et a_2 dans la projection A, et celle NP des deux points marqués de même dans la projection B. Le carré $\overline{MN}^2$ est la somme des premier et troisième

terme de l'expression Δ^2 donnée au § 2, et $\overline{M'N'}^2$ est celle des deux autres; par conséquent *la vraie distance* $c_1 a_2$ dans l'étendue est l'hypoténuse MP. Rien n'empêche d'opérer avec les deux projections B, D, qui donnent le triangle M'N'P' ayant la même longueur d'hypoténuse que MNP.

Dans le cas particulier qui a été choisi, on a

$$MN = 2\delta = d\sqrt{2}, \qquad NP = d,$$

d'où

$$c_1 a_2 = d\sqrt{3},$$

et $c_1 a_2$ est une des 96 droites du troisième groupe.

§ 8. — Les trois hexadécaédroïdes.

Si, ne se contentant pas de joindre les vingt-quatre points *deux à deux par des droites,* comme nous venons de le faire, on les joint *trois à trois par des plans* et *quatre à quatre par des espaces,* on peut former une multitude de configurations sur l'ensemble desquelles nous ne voulons pas même jeter les yeux. Mais nous en choisirons trois qui sont liées intimement au système de coordonnées et dont nous étudierons sommairement la constitution; elles s'obtiennent en associant d'abord les huit points qui sont dans *deux plans d'un même couple,* puis les seize points qui sont dans *deux couples,* et enfin les points des *trois couples.* Voici d'abord le premier cas, où nous ne devons rencontrer évidemment que des lignes du deuxième groupe, c'est-à-dire de longueur $d\sqrt{2}$.

Si nous ne conservons de la figure 7 que les quatre droites

$$a_1 a_3, \quad \alpha_1 \alpha_3, \quad a_2 a_4, \quad \alpha_2 \alpha_4$$

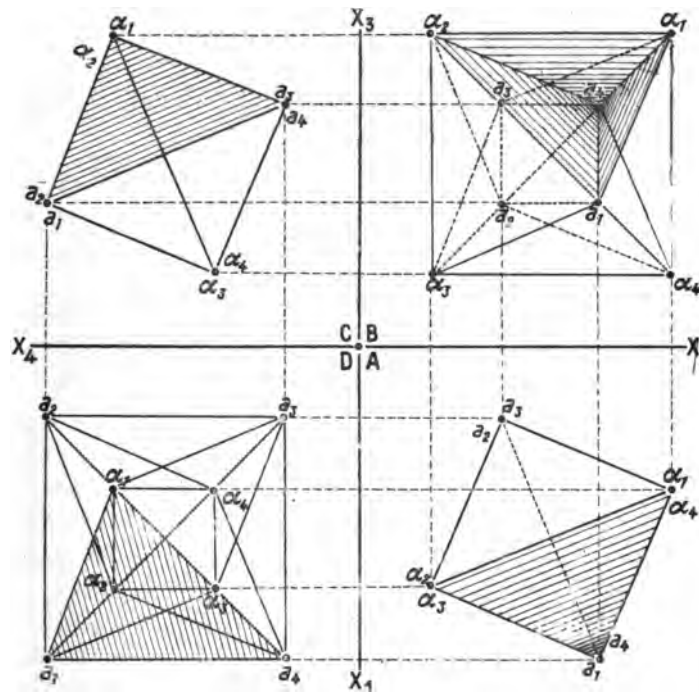
et supprimons tout le reste, nous avons la figure 9. Ces quatre droites se croisent par leurs milieux à l'origine; elles sont perpendiculaires chacune à chacune, comme le montrent les projections; elles forment donc un quadrièdre droit complet, pareil à celui que forment les quatre droites x_1, x_2, x_3, x_4 du paragraphe précédent. Leurs huit points terminaux sont donc les sommets de seize tétraèdres réguliers, savoir, en remplaçant les chiffres

d'alors 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 respectivement par les lettres a_1, α_1, a_2, α_2, a_3, α_3, a_4, α_4 :

	I.	II.	III.	IV.
1.....	$a_1\ a_2\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_1\ a_2\ \alpha_1\ \alpha_4$,	$a_1\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_1\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_4$,
2.....	$a_1\ a_2\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_1\ a_2\ \alpha_2\ \alpha_3$,	$a_1\ a_4\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_1\ a_4\ \alpha_2\ \alpha_3$,
3.....	$a_3\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_3\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_4$,	$a_2\ a_3\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_2\ a_3\ \alpha_1\ \alpha_4$,
4.....	$a_3\ a_4\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_3\ a_4\ \alpha_2\ \alpha_3$,	$a_2\ a_3\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_2\ a_3\ \alpha_2\ \alpha_3$.

Ces seize tétraèdres sont représentés dans la figure 9, qu'il nous faut expliquer sommairement parce que c'est la première projection de ce genre qui se présente.

Fig. 9.



Le premier hexadécaédroïde.
On a ombré le tétraèdre $a_1 a_4 \alpha_1 \alpha_2$.

La moitié droite de la figure est la projection de l'hypercorps sur notre espace, polyèdre qui a lui-même pour projections les figures planes A et B. Le point $a_1 a_4$, tout en bas, représente une

arête perpendiculaire au plan A, commune à quatre tétraèdres dans lesquels elle a pour arête opposée

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_4, \quad \alpha_2\alpha_3,$$

les deux premières parallèles, les deux autres perpendiculaires au plan A; on se figurera aisément ces quatre tétraèdres en les regardant sur la projection B. Le premier est *teinté* sur les quatre projections A, B, C, D. Les deux derniers sont réduits à un *trapèze plan* parce qu'ils sont dans un espace perpendiculaire au nôtre. En se transportant successivement aux trois autres sommets du carré A, on a de même quatre tétraèdres à chaque fois, mais des doubles emplois font qu'il n'y en a que douze différents; ce sont ceux des colonnes II, III et IV. Ceux de la colonne I ont pour arêtes opposées les quatre couples

$$a_1a_2 \text{ et } \alpha_1\alpha_2, \quad a_1a_2 \text{ et } \alpha_3\alpha_4, \quad a_3a_4 \text{ et } \alpha_1\alpha_2, \quad a_3a_4 \text{ et } \alpha_3\alpha_4$$

qui se projettent sur les diagonales du carré A.

Les huit tétraèdres I et IV n'ont pas de face commune entre eux, et les huit autres sont dans le même cas. Mais les deux groupes de huit accolent réciproquement leurs faces comme ceci :

I^1 avec II^1, II^2, III^1, III^2; IV^1 avec II^1, II^3, III^1, III^2;
I^2 avec II^1, II^4, III^2, III^4; IV^2 avec II^2, II^4, III^1, III^2;
I^3 avec II^3, II^4, III^1, III^3; IV^3 avec II^1, II^3, III^3, III^4;
I^4 avec II^3, II^4, III^2, III^4; IV^4 avec II^2, II^4, III^3, III^4.

Les 16×4 faces sont ainsi toutes employées, et leur nombre effectif est réduit à 32. *Aucune d'elles n'est libre et aucune n'est employée plus d'une fois.* L'ensemble des tétraèdres forme donc *quelque chose de continu, qui enclôt une certaine portion d'étendue tout autour de l'origine* O. C'est un *corps à quatre dimensions* dont la nature est d'être limité par des polyèdres, qu'on appelle *ses cases polyédrales*, de même que celle du polyèdre, corps à trois dimensions, est d'être limité par des polygones qu'on appelle *ses faces polygonales*. Cette chose a reçu, dans l'innombrable famille des *hypercorps*, le nom générique de *polyédroïde*.

On peut n'en considérer que l'*enveloppe*, qui est, comme nous venons de voir, un assemblage de polyèdres et, par suite, *est à trois dimensions*, bien qu'elle existe dans l'étendue puisque ces

polyèdres sont dans autant d'espaces différents. On peut, au contraire, ne considérer que la *portion d'étendue circonscrite par cette enveloppe :* c'est alors que l'on a le *corps à quatre dimensions proprement dit,* pour lequel il faut une nouvelle unité, dont il a été déjà question dans le paragraphe 1, et qui sera définie dans le prochain paragraphe.

Le polyédroïde particulier que nous avons sous les yeux s'appelle un *hexadécaédroïde régulier;* il a *huit sommets* et *seize cases tétraédrales.* On voit par le petit Tableau de la page 23 : 1° que chaque sommet de tétraèdre, par exemple a_1 (première et deuxième ligne), est répété huit fois; en d'autres termes, les 16×4 sommets que possèdent ensemble les seize tétraèdres *se réunissent par huit en huit points,* qui sont les huit sommets de l'hypercorps; 2° que chaque arête de tétraèdre, par exemple $a_1\alpha_1$ (première ligne), est répétée quatre fois; en d'autres termes, les cases *tiennent par quatre* à une même arête qui est une arête de l'hypercorps, d'où suit que le nombre de celles-ci est $\frac{16 \times 6}{4} = 24$ et qu'il en a $\frac{24 \times 2}{8} = 6$ aboutissant à chaque sommet.

Les deux autres systèmes de bissectrices, $b\beta$ et $c\gamma$ de la figure 4, fournissent chacun un autre hexadécaédroïde régulier, que définirait un Tableau déduit du précédent en remplaçant a et α par b et β, puis par c et γ. Ces deux nouveaux hypercorps, qui ne diffèrent du premier que par leur position dans l'étendue, sont représentés par les figures 10 et 11.

La figure 10 paraît avoir, en B et D, les mêmes formes que la précédente avec une orientation différente; mais, comme les sommets des carrés A, C ne sont pas des points doubles, il ne se trouve pas de tétraèdre perpendiculaire à ces plans. Le cas de cette figure est celui qui montre le mieux la construction de l'hexadécaédroïde, laquelle revient à ceci : 1° étant donnés deux carrés égaux $b_1b_2b_3b_4$ et $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, les poser dans les deux plans absolument perpendiculaires A et C de telle sorte que la distance d'un sommet quelconque de l'un à un sommet quelconque de l'autre ait toujours la même valeur $d\sqrt{2}$, égale au côté des carrés (*voir* p. 10); 2° construire les quatre tétraèdres qui ont b_1b_2 pour

Fig. 10. — Le deuxième hexadécaédroïde.
Dans les projections A, C, D on a ombré le tétraèdre $b_1 b_4 \beta_1 \beta_4$.

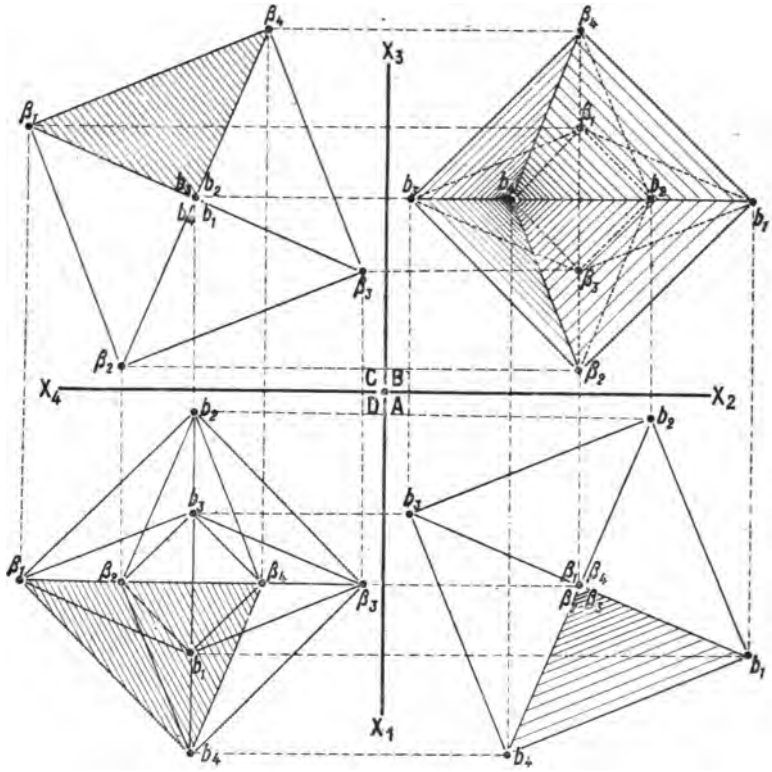
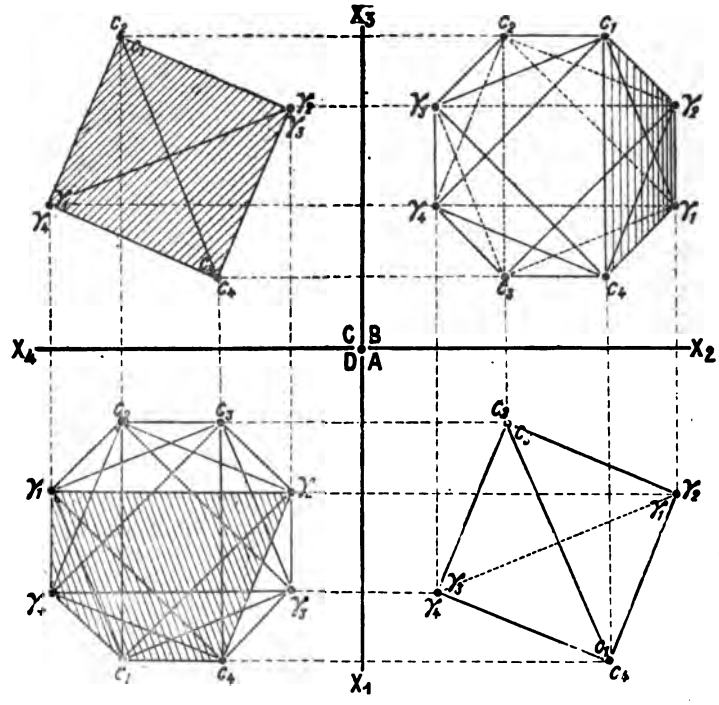


Fig. 11. — Le troisième hexadécaédroïde.
On a ombré le tétraèdre $c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2$, réduit à un trapèze dans les espaces AB et AD.



arête commune et respectivement $\beta_1\beta_2$, $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_4$, $\beta_4\beta_1$ pour arête opposée à celle-là; 3°, 4° et 5° traiter successivement de même chacun des trois autres côtés b_2b_3, b_3b_4, b_4b_1 du premier carré. Les seize tétraèdres ainsi enchevêtrés seront égaux et réguliers, mais, bien entendu, il ne peut pas en être de même pour leurs projections sur notre espace.

§ 9. — L'octaédroïde.

I. — Sommets et cubes conjugués.

I. On a vu, page 20, qu'il part du point c_1 huit droites ayant la longueur d et aboutissant aux huit points

$$\alpha_1,\ b_1,\ a_1,\ \beta_1,\ \beta_4,\ a_4,\ b_4,\ \alpha_2.$$

On trouve cet assemblage de points dans la figure 12 et nous le reproduisons séparément dans la figure 13 mais sans les lignes aboutissantes; on remarquera : 1° qu'ils sont reliés par trois systèmes de droites parallèles quatre à quatre (1), savoir :

$$\begin{array}{cccc} b_1a_1, & \alpha_1\beta_1, & \beta_4\alpha_2, & a_4b_4, \\ b_1a_4, & \alpha_1\beta_4, & \beta_1\alpha_2, & a_1b_4, \\ b_1\alpha_1, & a_1\beta_1, & b_4\alpha_2, & a_4\beta_4; \end{array}$$

2° que les douze droites sont dans un même espace, car, si l'on considère l'espace des droites b_1a_1, b_1a_4, $b_1\alpha_1$, on voit de suite que $a_1\beta_1$ et $a_1\beta_4$ y ont deux points, un, a_1, à distance finie et un à l'infini, puis on y ramène les autres droites de proche en proche de la même manière; 3° que l'angle de deux droites partant d'un quelconque des huit points, par exemple b_1a_1 et b_1a_4, est droit, car on a

$$\overline{b_1a_1}^2 + \overline{b_1a_4}^2 = 4\,\delta^2 = \overline{a_1a_4}^2,$$

comme dans tout triangle rectangle.

Il suit de là que nos huit points sont les sommets de ce polyèdre à trois dimensions appelé un *hexaèdre régulier*, ou un

(1) Nous disons que les droites sont parallèles parce que toutes leurs projections le sont.

Fig. 12. — Le premier octaédroïde.
On a ombré le cube $C_1 = a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1 a_4 b_4 \alpha_4 \beta_4$.

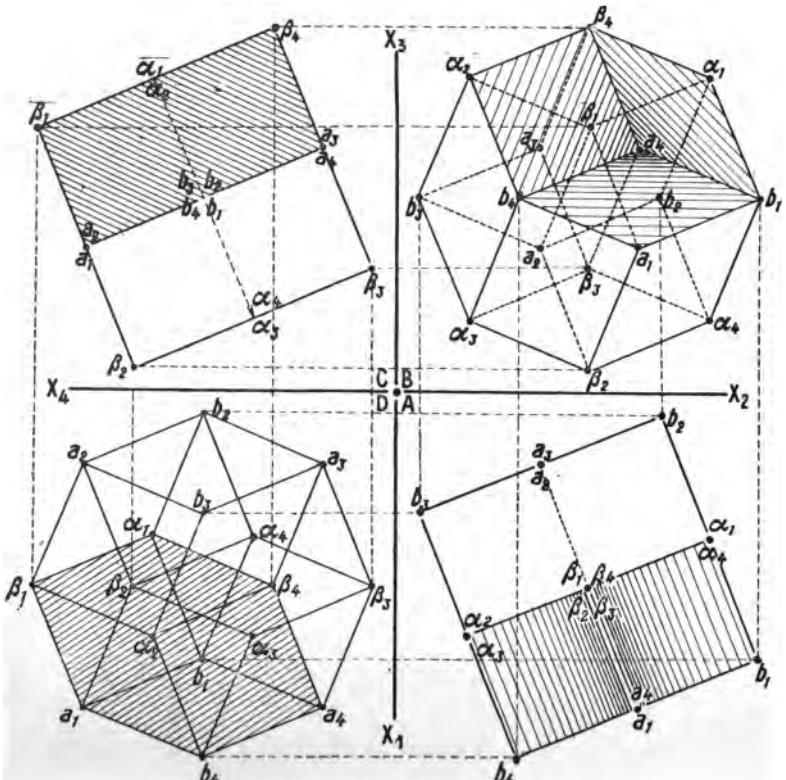
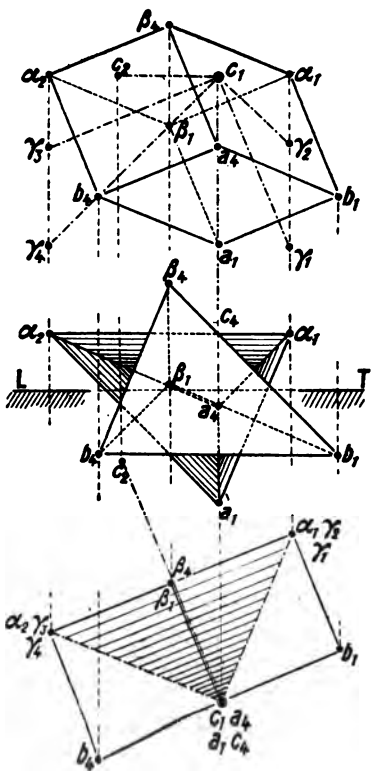


Fig. 13.
1° Le cube conjugué du sommet c_1;
2° *Stella octangula* de Képler.



cube. Pour chacun des vingt-quatre points dont le Tableau I donne les coordonnées, on peut construire un cube pareil à celui que nous avons construit pour c_1 : il y a correspondance univoque entre les uns et les autres, et nous appellerons *conjugués l'un de l'autre* le sommet et le cube qui se correspondent. Le second *est autour* du premier, qui est, pour ainsi dire, *la pointe d'une calotte dont les arêtes, les plans et les espaces s'appuient respectivement sur ses sommets, ses arêtes et ses faces;* de même que, dans la Géométrie à trois dimensions, tout sommet d'un polyèdre a *autour de lui* un polygone *sur les sommets et les côtés duquel s'appuient ses arêtes et ses faces.*

Le Tableau II fait connaître cette correspondance entre sommets et cubes. Chacun de ceux-ci y est désigné par deux faces opposées, pour lesquelles nous avons choisi celles qui ont *des carrés* pour projections sur les plans A et C ; pour abréger, nous désignerons un cube par la lettre affectée au sommet qui lui est conjugué, en la mettant entre deux parenthèses.

TABLEAU II. — SOMMETS ET CUBES CONJUGUÉS.

SOMMETS	TROISIÈME OCTAÈDROÏDE.	SOMMETS.	DEUXIÈME OCTAÉDROÏDE.	SOMMETS.	PREMIER OCTAÉDROÏDE.
a_1	$b_1, c_1, \beta_1, \gamma_1$; $c_4, b_4, \gamma_4, \beta_2$	b_1	$c_1, a_1, \gamma_1, \alpha_1$; $a_4, c_4, \alpha_4, \gamma_2$	c_1	$a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$; $b_4, a_4, \beta_4, \alpha_2$
a_2	$b_3, c_2, \beta_1, \gamma_4$; $c_3, b_2, \gamma_1, \beta_2$	b_2	$c_3, a_2, \gamma_1, \alpha_4$; $a_3, c_2, \alpha_1, \gamma_2$	c_2	$a_3, b_2, \alpha_1, \beta_4$; $b_3, a_2, \beta_1, \alpha_2$
a_3	$b_3, c_3, \beta_3, \gamma_3$; $c_2, b_2, \gamma_2, \beta_4$	b_3	$c_3, a_3, \gamma_3, \alpha_3$; $a_2, c_2, \alpha_2, \gamma_4$	c_3	$a_3, b_3, \alpha_3, \beta_3$; $b_2, a_2, \beta_2, \alpha_4$
a_4	$b_1, c_4, \beta_3, \gamma_2$; $c_1, b_4, \gamma_3, \beta_4$	b_4	$c_1, a_4, \gamma_3, \alpha_2$; $a_1, c_4, \alpha_3, \gamma_4$	c_4	$a_1, b_4, \alpha_3, \beta_2$; $b_1, a_4, \beta_3, \alpha_4$
α_1	$b_1, c_1, \beta_1, \gamma_1$; $\gamma_2, \beta_4, c_2, b_2$	β_1	$c_1, a_1, \gamma_1, \alpha_1$; $\alpha_2, \gamma_4, a_2, c_2$	γ_1	$a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$; $\beta_2, \alpha_4, b_2, a_2$
α_2	$b_3, c_2, \beta_1, \gamma_4$; $\gamma_3, \beta_4, c_1, b_4$	β_2	$c_3, a_2, \gamma_1, \alpha_4$; $\alpha_3, \gamma_4, a_1, c_4$	γ_2	$a_3, b_2, \alpha_1, \beta_4$; $\beta_3, \alpha_4, b_1, a_4$
α_3	$b_3, c_3, \beta_3, \gamma_3$; $\gamma_4, \beta_2, c_4, b_4$	β_3	$c_3, a_3, \gamma_3, \alpha_3$; $\alpha_4, \gamma_2, a_4, c_4$	γ_3	$a_3, b_3, \alpha_3, \beta_3$; $\beta_4, \alpha_2, b_4, a$
α_4	$b_1, c_4, \beta_3, \gamma_2$; $\gamma_1, \beta_2, c_3, b_2$	β_4	$c_1, a_4, \gamma_3, \alpha_2$; $\alpha_1, \gamma_2, a_3, c_2$	γ_4	$a_1, b_4, \alpha_3, \beta_2$; $\beta_1, \alpha_2, b_3, a_2$

On voit que les vingt-quatre cubes se divisent naturellement en trois groupes caractérisés par ceci que ceux du premier groupe n'ont aucun de leurs sommets désigné par une lettre c ou γ, et n'ont pour conjugués que des points désignés par une de ces deux lettres; de même pour les deux autres groupes et les lettres b ou β, a ou α.

Considérons en particulier le groupe qui forme la dernière colonne du Tableau; ce que nous en dirons s'appliquera en tous points aux deux autres.

Deux cubes tels que

$$(c_1) \text{ et } (c_3), \quad (c_2) \text{ et } (c_4), \quad (\gamma_1) \text{ et } (\gamma_3), \quad (\gamma_2) \text{ et } (\gamma_4)$$

sont formés de points symétriquement placés par rapport à l'origine et nous dirons d'eux qu'ils sont *opposés*. Cela étant, si nous prenons le premier de ces cubes (c_1), et si nous laissons de côté son opposé, nous voyons par le Tableau qu'il a une face commune $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$, $a_1 b_1 a_4 b_4$, $a_4 b_1 \alpha_1 \beta_4$, $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_4$, $a_1 b_4 \alpha_2 \beta_1$, $a_4 b_4 \alpha_2 \beta_4$, avec chacun des six autres cubes

$$(\gamma_1), \quad (c_4), \quad (\gamma_2), \quad (c_2), \quad (\gamma_4), \quad (\gamma_3),$$

ce que nous exprimerons en disant *qu'il est en contact avec chacun d'eux par cette face*. Il en est de même, naturellement, pour tous les autres. Ainsi, de même que le *cube* de la Géométrie à trois dimensions est constitué par *six carrés opposés et parallèles deux à deux, deux carrés opposés tenant à chacun des quatre autres par un de leurs quatre côtés;* de même l'octaédroïde est constitué (*fig.* 12) par *huit cubes opposés et parallèles deux à deux, chacun de deux cubes opposés tenant à un des six autres par une de ses faces.* Et, de même que les six faces du premier, ne laissant entre elles aucune solution de continuité, enclosent une certaine portion de l'*espace* qui le contient, de même les huit cubes du second, ne laissant entre eux aucune solution de continuité, enclosent une certaine portion de l'*étendue*. Nous arrivons à un deuxième polyédroïde régulier qu'on a appelé l'*octaédroïde*. Il a *seize sommets* et *huit cases cubiques*. Les figures 12, 14, 15 montrent en AB des polyèdres de notre espace qui ont aussi seize sommets et sont décomposables en huit *parallélépipèdes* correspondant à ces huit cubes.

II. — Le mètre octaédroïde.

L'unité du quatrième degré dont il a été question dans le paragraphe 1 n'est autre chose qu'un *octaédroïde régulier* pour lequel

on a (*fig.* 12)

$$d = a_1 b_1 = 1^m;$$

on pourrait appeler cette unité le *mètre octaédroïde,* mot correspondant à ceux de *mètre carré* et *mètre cube.*

III. — Stella octangula.

On peut écrire ainsi les lignes successives de la troisième colonne du Tableau, en en transposant les termes :

$$a_1 a_4 \alpha_1 \alpha_2 + b_1 b_4 \beta_1 \beta_4,$$
$$a_2 a_3 \alpha_1 \alpha_2 + b_2 b_3 \beta_1 \beta_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où l'on conclut ces trois propositions :

1° *Les sommets de l'octaédroïde ne sont autre chose que la réunion des huit sommets du premier hexadécaédroïde* (§ 6 et figures 10, 11) *avec les huit sommets du second.*

2° *Les huit cubes du même octaédroïde ne sont autre chose que la réunion de huit des seize tétraèdres du premier hexadécaédroïde avec huit des seize tétraèdres du second, chaque couple de tétraèdres prenant la position appelée* stella octangula *de Képler* (*Traité élémentaire,* § 43).

On a profité d'une place vide dans la figure 13 pour y représenter cette manière de réunir les huit sommets d'un cube, le cube (c_1), et l'ombre de la projection horizontale de cette même figure 13 (qui est la même que dans la figure 9) se rapporte à l'un de ces tétraèdres.

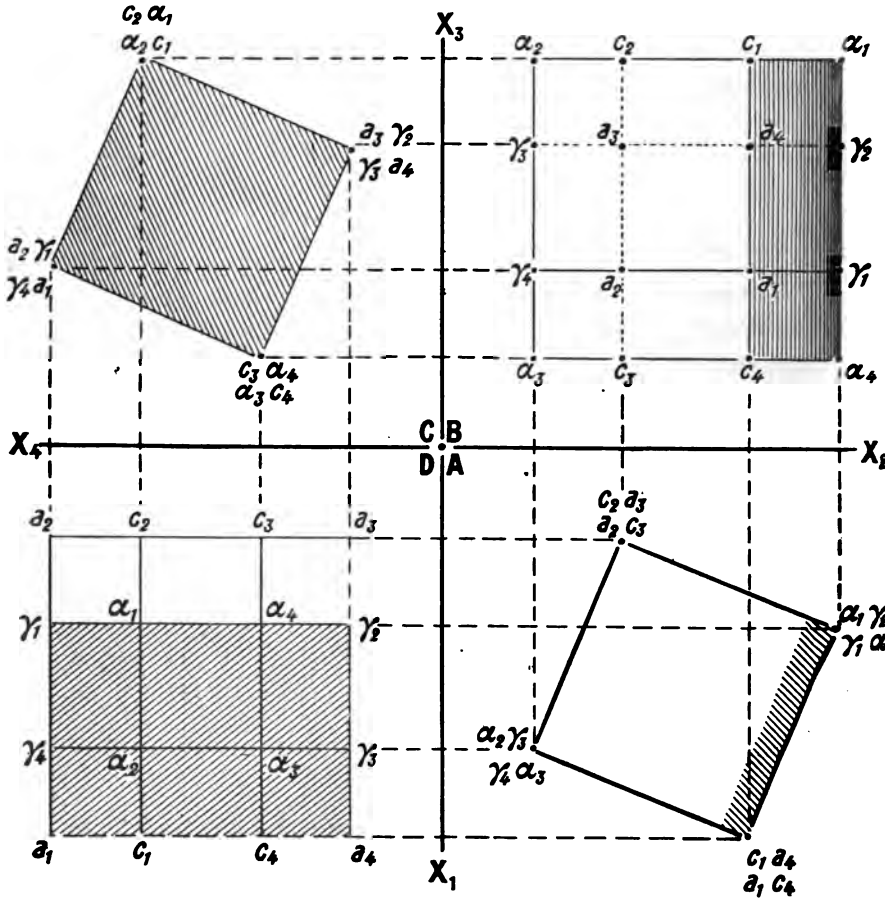
IV. — Les trois octaédroïdes.

Les deuxième et première colonnes du Tableau II, et les figures 14 et 15 qui leur correspondent, donnent chacune *un autre* octaédroïde. Ces trois hypercorps sont construits, comme il a été dit page 13, en prenant successivement, dans les vingt-quatre points terminaux du quadrièdre droit complet, les seize points contenus dans le premier et le second couples de plans absolument perpendiculaires, pour ceux contenus dans le deuxième et le troisième, enfin ceux contenus dans le troisième et le premier.

En réalité, c'est *un seul et même hypercorps* que les figures 12, 14 et 15 placent dans des positions différentes par rapport aux plans de projection. Ils se *correspondent* en effet comme le montre

Fig. 14. — Le deuxième octaédroïde.

On a ombré le cube $c_1a_1\ \gamma_1\alpha_1\ a_4c_4\ \alpha_4\gamma_2$ réduit à un rectangle dans les espaces AB et AD.

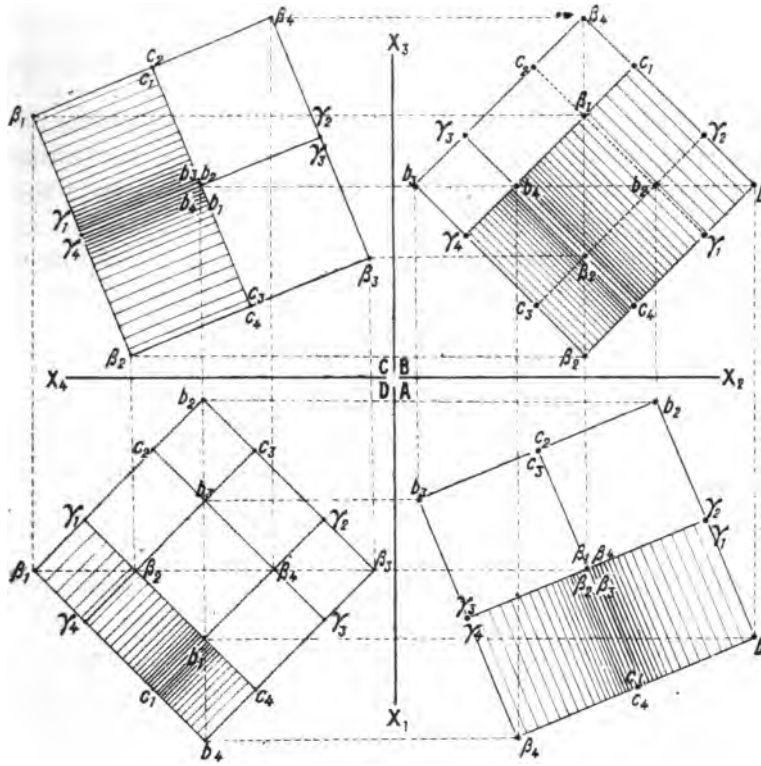


le petit Tableau suivant, entendant par là que si l'on pose, dans l'étendue, sur quatre sommets quelconques de l'un d'eux, les quatre sommets de chacun des deux autres que l'imprimeur a mis *au-dessus* ou *au-dessous,* tous les autres groupes de trois som-

mets qu'il a mis aussi *sur une même verticale* coïncideront ensemble :

I : $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$ $a_2 b_2 \alpha_2 \beta_2$ $a_3 b_3 \alpha_3 \beta_3$ $a_4 b_4 \alpha_4 \beta_4$,
II : $b_1 c_1 \beta_1 \gamma_1$ $b_2 c_2 \beta_2 \gamma_2$ $b_3 c_3 \beta_3 \gamma_3$ $b_4 c_4 \beta_4 \gamma_4$,
III : $c_1 a_1 \gamma_1 \alpha_1$ $c_2 a_2 \gamma_2 \alpha_2$ $c_3 a_3 \gamma_3 \alpha_3$ $c_4 a_4 \gamma_4 \alpha_4$.

Fig. 15. — Le troisième octaédroïde.
On a ombré le cube $b_1 c_1 \beta_1 \gamma_1 c_4 b_4 \gamma_4 \beta_2$.



On a ombré dans les trois épures le *premier cube* de chacune des trois colonnes du Tableau II, page 29.

§ 10. — L'icosatétraédroïde.

I. — Les vingt-quatre octaèdres.

On a vu dans le paragraphe précédent que les huit droites de longueur d qui partent du point c_1 aboutissent aux huit sommets d'un cube que nous avons désigné par (c_1) et dont les six faces sont

$$a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1, \quad a_1 b_1 a_4 b_4, \quad b_1 \alpha_1 \beta_4 a_4, \quad \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_4, \quad \beta_1 a_1 b_4 \alpha_2, \quad b_4 \alpha_2 \beta_4 a_4.$$

Le lecteur est prié de se reporter à la figure 13, qui représente ce cube séparément; mais il n'aura plus à s'occuper de l'image qui a été placée au milieu de cette figure comme un mot entre parenthèses, et qui a son explication page 31.

Considérons en particulier la première face $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$, aux sommets de laquelle aboutissent les quatre droites

$$c_1 a_1, \quad c_1 b_1, \quad c_1 \alpha_1, \quad c_1 \beta_1.$$

En même temps que celles-là, nous voyons partir d'un autre point γ_1, symétrique de c_1 par rapport au plan $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$, quatre droites de même longueur d aboutissant au même sommet :

$$\gamma_1 a_1, \quad \gamma_1 b_1, \quad \gamma_1 \alpha_1, \quad \gamma_1 \beta_1.$$

Si nous remarquons en outre que les quatre côtés du carré ont aussi cette même longueur d, et que les trois distances $a_1 \alpha_1$, $b_1 \beta_1$, $c_1 \gamma_1$, ont la longueur $d\sqrt{2}$, nous concluons que les six points sont les sommets d'un octaèdre régulier, que nous désignerons, d'après ses trois diagonales, par

$$a_1 \alpha_1 . b_1 \beta_1 . c_1 \gamma_1.$$

On peut dire la même chose pour toutes les faces du cube, car il existe pour chacune d'elles un point symétrique de c_1 :

$$\gamma_1, \quad c_4, \quad \gamma_2, \quad c_2, \quad \gamma_4, \quad \gamma_3.$$

Il y a donc six octaèdres réguliers ayant le sommet commun c_1

et dont les diagonales partant de ce point sont les six lignes

$$c_1\gamma_1, \quad c_1c_4, \quad c_1\gamma_2, \quad c_1c_2, \quad c_1\gamma_4, \quad c_1\gamma_3$$

tracées en trait mixte sur la figure 13.

Comme l'autre extrémité de ces lignes est en un point congénère de c_1, leur nombre est, pour les vingt-quatre points,

$$\tfrac{1}{2}.24.6 = 24 \times 3.$$

Elles s'associent par trois, par exemple $c_1\gamma_4$ avec $a_1\alpha_2$ et $b_4\beta_1$, pour être les trois diagonales d'un octaèdre et par conséquent *le nombre de ceux-ci est vingt-quatre.*

Chacun des vingt-quatre sommets dont le Tableau I (p. 19) fournit les coordonnées appartient à six octaèdres réguliers différents, dont chacun a pour *équateur* une face d'un des vingt-quatre cubes donnés dans le Tableau II, et chacun de ceux-ci fournit une de ses faces à six octaèdres différents. Cela ferait 24×6 octaèdres; mais, comme chacun d'eux a pour sommet un des vingt-quatre points, leur nombre effectif n'est que vingt-quatre, qu'on retrouve de cette seconde manière.

Le Tableau III donne ces vingt-quatre octaèdres, définis par leurs trois diagonales respectives. Ils y sont rangés en *trois groupes de huit,* désignés par A, B, C, et caractérisés par ceci que *chaque groupe* est fermé sur lui-même et se reproduit indéfiniment par permutation circulaire des lettres; on va voir la définition géométrique.

TABLEAU III. — LES VINGT-QUATRE OCTAÈDRES.

GROUPE A.		GROUPE B.		GROUPE C.	
A_1	$a_1, \alpha_2;\ b_4, \beta_1;\ c_1, \gamma_4$	B_1	$a_1, \alpha_1;\ b_1, \beta_1;\ c_1, \gamma_1$	C_1	$a_1, a_2;\ \beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_4$
A_2	$a_3, \alpha_4;\ b_2, \beta_3;\ c_3, \gamma_2$	B_2	$a_2, \alpha_4;\ b_2, \beta_2;\ c_3, \gamma_1$	C_2	$a_3, a_4;\ \beta_3, \beta_4;\ \gamma_2, \gamma_3$
A_3	$a_1, \alpha_4;\ b_1, \beta_2;\ c_4, \gamma_1$	B_3	$a_3, \alpha_3;\ b_3, \beta_3;\ c_3, \gamma_3$	C_3	$\alpha_1, \alpha_2;\ \beta_1, \beta_4;\ c_1, c_2$
A_4	$a_3, \alpha_2;\ b_3, \beta_4;\ c_2, \gamma_3$	B_4	$a_4, \alpha_2;\ b_4, \beta_4;\ c_1, \gamma_3$	C_4	$\alpha_3, \alpha_4;\ \beta_2, \beta_3;\ c_3, c_4$
A_5	$a_2, \alpha_1;\ b_2, \beta_1;\ c_2, \gamma_1$	B_5	$a_1, \alpha_3;\ b_4, \beta_2;\ c_4, \gamma_4$	C_5	$a_4, a_1;\ b_4, b_1;\ c_1, c_4$
A_6	$a_4, \alpha_3;\ b_4, \beta_3;\ c_4, \gamma_3$	B_6	$a_2, \alpha_2;\ b_3, \beta_1;\ c_2, \gamma_4$	C_6	$a_2, a_3;\ b_2, b_3;\ c_2, c_3$
A_7	$a_2, \alpha_3;\ b_3, \beta_2;\ c_3, \gamma_4$	B_7	$a_3, \alpha_1;\ b_2, \beta_4;\ c_2, \gamma_2$	C_7	$\alpha_2, \alpha_3;\ b_4, b_3;\ \gamma_3, \gamma_4$
A_8	$a_4, \alpha_1;\ b_1, \beta_4;\ c_1, \gamma_2$	B_8	$a_4, \alpha_4;\ b_1, \beta_3;\ c_4, \gamma_2$	C_8	$\alpha_4, \alpha_1;\ b_1, b_2;\ \gamma_1, \gamma_2$

II. — Constitution de l'hypercorps.

On constate sans peine, comme nous l'avons fait pour les deux hypercorps précédents : 1° que les huit octaèdres d'un groupe sont opposés et parallèles deux à deux, deux octaèdres opposés ayant avec chacun des six autres un sommet commun, et pas autre chose; 2° que chacun d'eux marie ses huit faces à quatre de chacun des deux autres groupes comme ceci :

C_1	avec	$A_1, A_3, A_5, A_7,$	$B_1, B_2, B_5, B_6,$	B_1	avec	$C_1, C_3, C_5, C_8,$	$A_1, A_3, A_5, A_8,$
C_2	»	$A_2, A_4, A_6, A_8,$	$B_3, B_4, B_7, B_8,$	B_2	»	$C_1, C_4, C_6, C_8,$	$A_2, A_3, A_5, A_7,$
C_3	»	$A_1, A_4, A_5, A_8,$	$B_1, B_4, B_6, B_7,$	B_3	»	$C_2, C_4, C_6, C_7,$	$A_2, A_4, A_6, A_7,$
C_4	»	$A_2, A_3, A_6, A_7,$	$B_2, B_3, B_5, B_8,$	B_4	»	$C_2, C_3, C_5, C_7,$	$A_1, A_4, A_6, A_8,$
C_5	»	$A_1, A_3, A_6, A_8,$	$B_1, B_4, B_5, B_8,$	B_5	»	$C_1, C_4, C_5, C_7,$	$A_1, A_3, A_6, A_7,$
C_6	»	$A_2, A_4, A_5, A_7,$	$B_2, B_3, B_6, B_7,$	B_6	»	$C_1, C_3, C_6, C_7,$	$A_1, A_4, A_5, A_7,$
C_7	»	$A_1, A_4, A_6, A_7,$	$B_3, B_4, B_5, B_6,$	B_7	»	$C_2, C_3, C_6, C_8,$	$A_2, A_4, A_5, A_8,$
C_8	»	$A_2, A_3, A_5, A_8,$	$B_1, B_2, B_7, B_8,$	B_8	»	$C_2, C_4, C_5, C_8,$	$A_2, A_3, A_6, A_8;$

nous nous dispensons d'écrire un troisième Tableau qui aurait les A pour arguments et qui se déduit de ces deux-là avec la plus grande facilité.

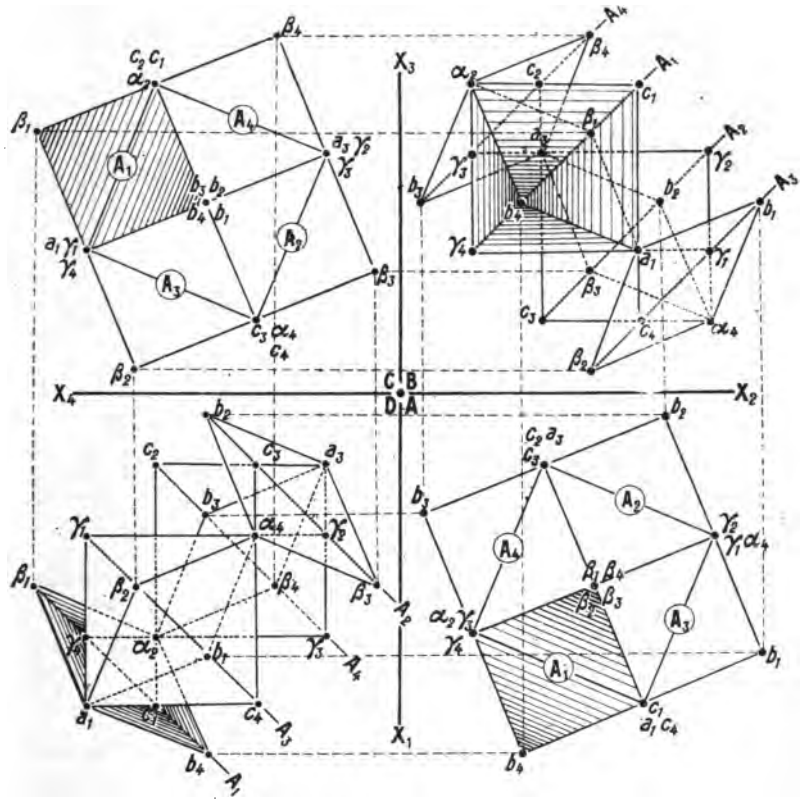
Ainsi, *contre une quelconque des huit faces d'un des vingt-quatre octaèdres se trouve appliquée une face d'un des vingt-trois autres, et chaque face se trouve ainsi employée une fois, ni plus ni moins.* Il n'y a pas de solution de continuité, et nous concluons, comme dans les deux cas précédents, que nous avons affaire à un solide régulier à quatre dimensions, qu'on a appelé l'*icosatétraédroïde*.

Cet hypercorps est représenté *partiellement* dans les figures 16, 17 et 18, comparées respectivement aux trois groupes du Tableau III. Nous disons *partiellement* parce que, pour ne pas embrouiller ces figures, nous n'y avons admis que la moitié des octaédroïdes, savoir *les quatre premiers* de chacune des quatre colonnes de ce Tableau : les quatre derniers formeraient un dessin pareil de forme à celui existant et *posé en croix* sur lui. Si l'on veut un langage plus précis, nous dirons, considérant seulement

la projection B, que le dessin supprimé est le symétrique du premier par rapport

à la verticale $\beta_4\beta_1\beta_3\beta_2$ dans la figure 16,
à l'horizontale $b_3b_4b_2b_1$ » 17,
à la diagonale $\alpha_3a_2a_1\alpha_1$ » 18.

Fig. 16. — L'icosatétraédroïde. Les quatre premiers octaèdres du groupe A. On a ombré l'octaèdre $a_1\alpha_2b_4\beta_1c_1\gamma_4$.



Dans les

première, seconde, troisième

de ces symétries, les octaèdres

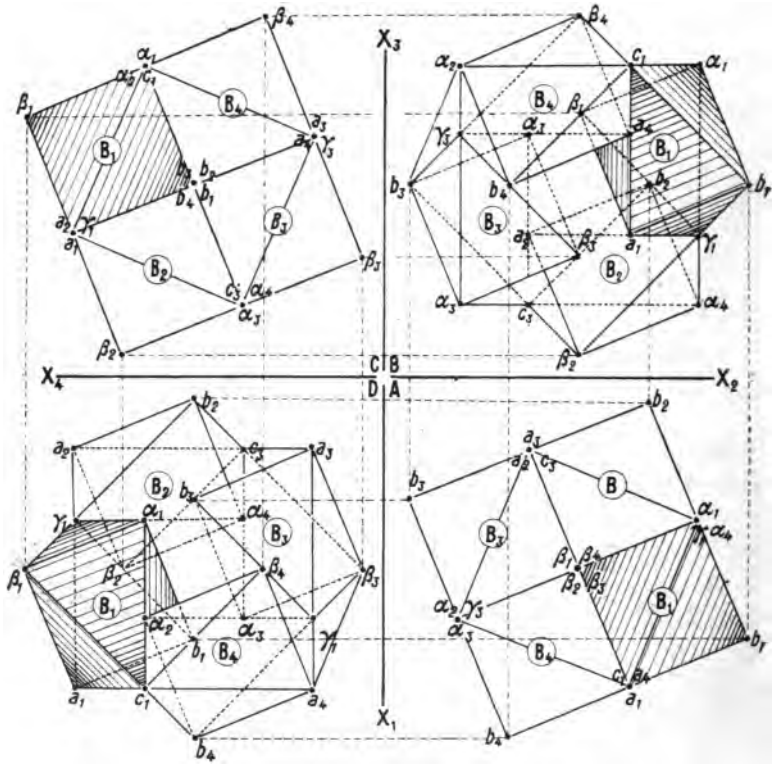
A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4; C_1, C_2, C_3, C_4

ont pour correspondants

$$A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8\ ;\quad B_8,\ B_7,\ B_6,\ B_5\ ;\quad C_6,\ C_5,\ C_8,\ C_7.$$

On ne perdra pas de vue la différence que voici entre nos trois

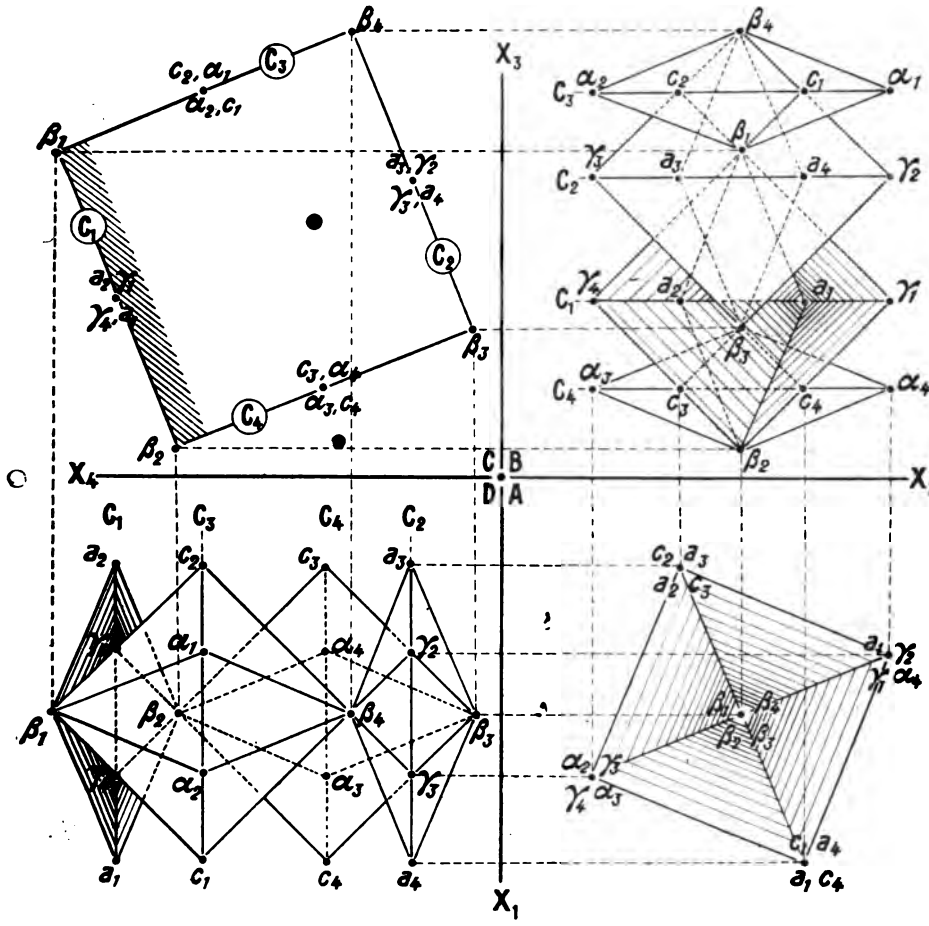
Fig. 17. — Suite de l'icosatétraédroïde. Les quatre premiers octaèdres du groupe B
On a ombré l'octaèdre $\beta_1 = a_1\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1$.



groupes de figures 9, 10 et 11, 12, 14 et 15, 16, 17 et 18. Chacune des six premières représente un hypercorps *complet,* qu'on peut, à la vérité, supposer être le même dans des positions différentes, pour les trois premières, et puis pour les trois suivantes. Mais les trois dernières figures ne représentent que *trois portions* différentes d'un seul et même hypercorps dans une seule et même position : il faut commencer par les compléter comme il vient d'être dit, et puis *les réunir,* pour faire une chose complète.

On a ombré dans les figures le premier octaèdre de chaque colonne du Tableau III.

Fig. 18. — Suite de l'icosatétraédroïde. Les quatre premiers octaèdres du groupe C. On a ombré l'octaèdre $a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_4$.



Ces figures, et en particulier la figure 18 C (1), nous mènent à

(1) Il est peut-être utile d'observer que les trois lettres A, B, C désignant des groupes d'octaèdres, et les quatre lettres A, B, C, D désignant les quatre angles droits de la feuille de dessin, ne se trouvent ici rapprochées que par hasard et n'ont aucun rapport entre elles.

la conception suivante de l'icosatétraédroïde. Quatre octaèdres du groupe C se trouvent respectivement dans quatre espaces qui forment un *prisme carré* perpendiculaire au plan C, et les quatre autres sont placés de même dans quatre espaces rectangulaires au plan A. Ces huit octaèdres n'ont ni face ni arête commune, mais chacun d'eux a un sommet commun avec un des six autres, son opposé ayant été mis de côté. Les octaèdres des deux autres groupes forment des figures identiques, et identiquement placées par rapport aux deux autres couples de plans coordonnés. Ces trois figures, chacune de huit octaèdres réguliers, s'incrustent l'une dans l'autre, remplissant réciproquement leurs vides : chacun des $24 \times 6 = 144$ sommets devient commun à six octaèdres, deux de chaque groupe, ce qui les réduit à 24; chacune des $24 \times 12 = 288$ arêtes devient commune à trois, un de chaque groupe, ce qui les réduit à 96; chacune des $24 \times 8 = 192$ faces devient commune à deux comme le montre le Tableau de la page 36, ce qui les réduit au même nombre 96.

En comparant les projections A et C des figures 11 et 15, on remarquera qu'au prisme d'espace qui contient les quatre octaèdres C_1, C_2, C_3, C_4 est inscrit un autre prisme formé par quatre espaces qui contiennent les quatre tétraèdres II^1, II^2, II^3 et II^4. Au reste, il est clair que les vingt-quatre sommets de l'icosatétraédroïde ne sont autre chose que la réunion de ceux de trois hexadécaédroïdes.

§ 11. — Observations générales.

I. On a énuméré (§ 7) quatre groupes de droites dont les longueurs ont respectivement pour carrés

$$d^2, \quad 2d^2, \quad 3d^2, \quad 4d^2.$$

Les premières sont les arêtes des octaédroïdes et de l'icosatétraédroïde, ainsi que des cubes et des octaèdres qui entrent dans leur constitution. Les secondes sont les arêtes des hexadécaédroïdes, et sont aussi les diagonales des octaèdres. Les troisièmes sont les diagonales des cubes. Enfin les quatrièmes sont les *grandes diagonales* des octaédroïdes et de l'icosatétraédroïde; ce

sont :

$$\begin{array}{cccc} a_1a_2, & \alpha_1\alpha_2, & a_3a_4, & \alpha_3\alpha_4, \\ b_1b_2, & \beta_1\beta_2, & b_3b_4, & \beta_3\beta_4, \\ c_1c_2, & \gamma_1\gamma_2, & c_3c_4, & \gamma_3\gamma_4, \end{array}$$

et les quatre de chaque ligne forment un système quadrirectangulaire. L'icosatétraédroïde jouit des trois systèmes, dont chaque espace est pour lui un *espace de symétrie;* les trois octaédroïdes ont chacun un des trois systèmes, et rien qu'un; il en est de même des trois hexadécaédroïdes.

II. Nous avons déduit de la simple considération du système de coordonnées la théorie de trois des six corps réguliers que connaît la Géométrie à quatre dimensions, plus riche que les autres en cette matière. Pour que le lecteur se rende bien compte des figures qui ont été l'instrument de cette recherche, nous allons les expliquer de nouveau sous une forme différente, mais d'identification facile.

Dans toutes les figures, l'angle *inférieur droit,* marqué A, est une portion du plan horizontal sur lequel est posée la feuille de dessin, et l'angle *supérieur droit,* marqué B, est une portion du plan vertical que vous avez devant vous, rabattue sur le plan du dessin par une rotation *d'avant en arrière* autour de la commune intersection, qui s'appelle la *ligne de terre* LT. Ensemble les deux plans définissent un espace E, qui est *notre espace;* ensemble les deux figures qui y sont tracées représentent un *polyèdre* P qui est la projection de l'hypercorps sur notre espace. C'est ce que nous appellerons pour un instant *la première épure;* elle occupe la *moitié droite* de la feuille de dessin.

Concevez maintenant, *à votre gauche,* un deuxième plan vertical C perpendiculaire à B; il forme avec B et A un trièdre trirectangle dans lequel est votre œil. Menez par le plan C un espace E′ perpendiculaire à E; l'hypercorps s'y projette suivant un autre polyèdre P′ qui va se présenter de la manière suivante. Faites tourner l'espace E′ autour du plan C jusqu'à ce qu'il coïncide avec le nôtre E: dans cet espace rabattu, *dont tous les plans coïncident maintenant avec ceux du nôtre,* prenez pour plans de projection horizontal et vertical les deux plans C et D qui coïncident respectivement avec les plans vertical et horizontal de la

première épure, et supposez le polyèdre P′ défini et représenté par ses projections sur ces deux plans : ce sera *la deuxième épure,* laquelle coupe la *partie gauche* de la feuille.

Ainsi *les deux espaces* E, E′ *et le plan* C jouent dans la Géométrie descriptive à quatre dimensions le même rôle que les *deux plans de projection et la ligne* LT dans celle à trois, et les constructions de la première se ramènent à celles de la seconde par le moyen de *deux épures qui ne sont pas simplement juxtaposées, mais sont intimement reliées ensemble,* car l'on peut faire un autre jeu par les associations A et D, C et B, supposant alors que c'est l'espace des plans A et D qui est le nôtre, et celui des plans C et B qui est rabattu.

Afin de rendre les figures plus expressives, nous avons, conformément à l'usage général des dessinateurs, fait usage, dans l'épure AB, de traits pleins et de traits pointillés pour distinguer des parties vues et des parties cachées; nous avons en outre marqué quelques plans fuyants par des hachures se serrant progressivement. Dans les deux autres projections C et D, nous nous sommes quelquefois dispensés de ce figuré, et l'avons quelquefois remplacé par des hachures couvrant uniformément un des polyèdres constituants.

III. Quand vous examinez la projection d'un polyèdre matériel sur un plan, vous ne pouvez pas toujours discerner les projections des divers polygones qui en sont les faces. Non seulement ceux-ci ont été plus ou moins déformés et aplatis, pouvant même être réduits à de simples fragments de droites, mais encore les projections individuelles des polygones se recouvrent partiellement et toutes ces *épaisseurs de plans* superposées sont fondues en une seule figure dans le dessin.

Quand on projette un polyédroïde sur un espace, ses diverses cases ont pour projections des polyèdres, qui sont aussi plus ou moins déformés et aplatis et peuvent même se réduire à des figures planes (1). Mais ce n'est pas tout : ces polyèdres doivent être considérés comme situés dans autant d'espaces superposés

(1) *Voir,* par exemple, les curieuses projections A de la figure 15 et C de la figure 17.

se recouvrant plus ou moins, et les *épaisseurs d'espaces* se fondent en une seule dans la projection qu'il nous est donné de voir. Les polyèdres s'y pénètrent les uns les autres, et, si on les construisait individuellement, il faudrait, pour réaliser la projection d'ensemble en les réunissant, y faire des *suppressions* correspondant à ces pénétrations.

C'est ce qui explique pourquoi nous ne pouvons pas nous élever de la vue de la projection à la conception de l'objet projeté. Il nous serait facile de construire deux polyèdres qui soient les perspectives d'un même polyédroïde prises de deux points de vue différents. Ils en seraient *l'image stéréoscopique* (1) pour deux yeux placés en ces deux points. Mais l'image stéréoscopique plane ne nous donne la sensation du corps à trois dimensions que si nous mettons nos deux yeux dans un plan différent du sien, et l'autre ne nous rendrait le même service vis-à-vis du corps à quatre dimensions que si nous pouvions de même mettre nos yeux dans un espace différent.

---

(1) Nous donnons à ce mot un sens surélevé que le lecteur comprendra facilement. L'idée est de M. Jules Richard : *Sur la philosophie des Mathématiques*, in-18. Paris, 1903.

CHAPITRE III.

L'HEXAGRAMME DE PASCAL.

§ 12. — Les soixante hexagones.

1. Considérons, *dans un plan,* six points

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6

dont trois quelconques ne soient pas en ligne droite; nous les appellerons *les points fondamentaux*.

Si nous les joignons deux à deux de toutes les manières possibles, nous avons $\frac{6.5}{1.2} = 15$ droites :

(2)
$$\left\{\begin{array}{l} 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16, \\ \quad 23,\ 24,\ 25,\ 26, \\ \quad\quad 34,\ 35,\ 36, \\ \quad\quad\quad 45,\ 46, \\ \quad\quad\quad\quad 56. \end{array}\right.$$

qui seront *les droites fondamentales* ou *les droites* δ.

En outre des six points (1), ces droites ont encore *quarante-cinq* points d'intersection. Chacune, par exemple 12, doit en effet en porter quatorze, mais quatre sont réunis en 1 et quatre en 2, ce qui réduit les autres à six (1); chacun de ceux-ci figurant sur deux droites, le nombre effectif des intersections autres que 1, 2, 3, 4, 5, 6 est

$$\frac{1}{2} \cdot 15.6 = 45;$$

nous les appellerons *les points j*.

2. Partagez les six chiffres (1) en trois groupes de deux, l'ordre

(1) Il y a par exemple sur 12 les intersections avec 34, 35, 36, 45, 46, 56.

des chiffres dans chaque groupe étant indifférent. Cela peut se faire de *quinze manières,* et, si vous admettez qu'un couple représente la droite qui passe par les deux points, cela vous donne *quinze triangles;* par exemple 12 34 56 sera celui qui a pour côtés les droites 12, 34 et 56. Chacun de ces triangles est tel que *ses trois côtés contiennent les six points* (1), *à raison de deux chacun.* Nous les appellerons collectivement *les triangles* Δ; ils sont écrits dans les seconds membres des formules (3) et nous les désignerons individuellement par les symboles qui forment les premiers membres de ces formules.

$$
(3)\quad
\begin{cases}
ab = 12\ 34\ 56, \\
ac = 13\ 25\ 46, \\
ad = 14\ 26\ 35, \\
ae = 15\ 24\ 36, \\
af = 16\ 23\ 45; \\
\\
bc = 16\ 24\ 35, \\
bd = 15\ 23\ 46, \\
be = 13\ 26\ 45, \\
bf = 14\ 25\ 36; \\
\\
cd = 12\ 36\ 45, \\
ce = 14\ 23\ 56, \\
cf = 15\ 26\ 34; \\
\\
de = 16\ 25\ 34, \\
df = 13\ 24\ 56; \\
\\
ef = 12\ 35\ 46.
\end{cases}
\qquad
(4)\quad
\begin{cases}
12 = ab\ \ cd\ \ ef, \\
13 = ac\ \ be\ \ df, \\
14 = ad\ \ bf\ \ ce, \\
15 = ae\ \ bd\ \ cf, \\
16 = af\ \ bc\ \ de; \\
\\
23 = af\ \ bd\ \ ce, \\
24 = ae\ \ bc\ \ df, \\
25 = ac\ \ bf\ \ de, \\
26 = ad\ \ be\ \ cf; \\
\\
34 = ab\ \ cf\ \ de, \\
35 = ad\ \ bc\ \ ef, \\
36 = ae\ \ bf\ \ cd; \\
\\
45 = af\ \ be\ \ cd, \\
46 = ac\ \ bd\ \ ef; \\
\\
56 = ab\ \ be\ \ df.
\end{cases}
$$

Ces premiers membres constituent une notation dont nous ferons usage à diverses fins, et qu'il faut entendre ainsi. Un symbole tel que *ab*, que nous appellerons un *binome,* et qui désigne ici un triangle, pourra désigner une droite, un plan, etc.; il ne devra pas *être décomposé;* de même que, dans la notation déterminantielle de Sylvester, *a* et *b* sont des *ombres de quantités* n'ayant séparément aucune signification (1). Nous n'attacherons pas non

(1) On complique quelquefois le symbole de deux parenthèses, pour mieux accentuer son unité.

plus de signification à l'ordre dans lequel ils sont écrits, lequel est dès lors indifférent.

3. Pour que quinze droites forment quinze triangles, il faut que chacune soit employée trois fois; c'est ainsi que les première, dixième et quinzième des équations (3) montrent que 12 appartient aux trois triangles *ab*, *cd* et *ef*, ce que nous exprimerons en écrivant $12 = abcdef$.

En *résolvant* de cette manière les équations (3), on les met sous la forme (4), qui fait connaître comment les quinze triangles s'arrangent par trois pour avoir un côté commun, et quel est celui-ci; de plus on y a une *seconde manière* de désigner les droites fondamentales, notation qui nous sera fort utile et avec laquelle les premières observations que voici familiariseront le lecteur (1).

Quand deux droites δ appartiennent à un même triangle Δ, elles se coupent sur un point *j*, et réciproquement. Par exemple, les deux droites

$$ab\ cd\ ef \quad \text{et} \quad ab\ ce\ df$$

qui appartiennent toutes deux, comme on voit, au triangle *ab*, se rencontrent en un point *j* que nous désignerons par le symbole $\binom{cf}{de}$, ou indifféremment $\binom{de}{cf}$: il s'obtient en prenant, parmi les six combinaisons *cd*, *ef*, *ce*, *df*, *cf*, *de*, les deux qui n'entrent pas déjà dans les symboles des deux droites.

Par le point $\binom{ab}{cd}$, il passe les deux droites

$$ac\ bd\ ef, \quad ad\ bc\ ef,$$

dont on voit de suite la construction.

Les points *j* qui sont sur la droite $ab\,cd\,ef$ sont au nombre de six, savoir :

$$\binom{ac}{bd}, \ \binom{ad}{bc}, \ \binom{ae}{bf}, \ \binom{af}{be}, \ \binom{ce}{df}, \ \binom{cf}{de}.$$

(1) Il faut attendre le Chapitre V, c'est-à-dire l'intervention de la quatrième dimension, pour voir clairement *ce qui* rapproche les symboles du type *ab* et ceux du type 12, et pour se rendre compte de ces notations qui semblent ici faites à plaisir (*Voir* § 35).

Le triangle *ab* a pour côtés et sommets respectivement opposés :

$$ab\ cd\ ef\begin{pmatrix} cd \\ ef \end{pmatrix};\quad ab\ ce\ df\begin{pmatrix} ce \\ df \end{pmatrix};\quad ab\ cf\ de\begin{pmatrix} cf \\ de \end{pmatrix}.$$

Pour avoir le symbole littéral d'un point donné en chiffres, soit 12 34, il faut ajouter à ces deux binomes celui formé par les deux chiffres manquants, qui est ici 56, puis écrire, d'après (3) et (4),

$$12\ 34\ 56 = ab$$
$$56 = ab\ ce\ df$$

et supprimer les termes identiques :

$$12\ 34 = ce\ df, \qquad \text{qu'on écrit} \quad \begin{pmatrix} ce \\ df \end{pmatrix}.$$

4. Ensemble les formules (3) et (4) dominent *ce Chapitre et les deux suivants*, et le lecteur aura sans cesse l'occasion de s'y référer.

Nous dirons de deux triangles Δ *n'ayant pas de côté commun qu'ils forment un couple.* Les équations (3) montrent que chaque triangle forme couple avec huit autres; ces huit couples sont, pour *ab* par exemple :

$$ab\,ac,\ ab\,ad,\ ab\,ae,\ ab\,af;\quad ab\,bc,\ ab\,bd,\ ab\,be,\ ab\,bf.$$

Il suit de là que le nombre des couples est

$$\tfrac{1}{2}.15.8 = 60,$$

et l'on voit en outre que les *symboles des deux triangles formant couple ont toujours une lettre commune.*

Nous dirons en outre que *trois triangles* Δ *forment un terne quand, pris deux à deux, ils forment chaque fois un couple.* Il faut pour cela que chacun de leurs trois binomes ait une lettre commune avec chacun des deux autres, d'où il suit qu'avec un couple donné *ab ac*, on n'a que deux manières de former un terne, l'un en ajoutant un binome qui contienne la lettre *a* déjà commune aux deux premiers, l'autre en formant ce troisième binome avec les lettres non communes *b* et *c* : on a ainsi les deux formes ou *espèces abacad* et *abacbc*, la seconde s'écrivant aussi *abbcca*. On voit aisément que les huit couples ci-dessus, dans lesquels

entre le triangle ab, peuvent produire douze ternes de la première espèce et quatre de la seconde, et l'on en conclut que le nombre des ternes est

$$\tfrac{1}{3}.15.12 = 60, \text{ pour la première espèce,}$$
$$\tfrac{1}{3}.15.\ 4 = 20, \text{ pour la seconde espèce.}$$

Lorsque deux triangles, tels que ab, ac, forment un couple, on appelle *leur associé* celui qui forme couple avec chacun d'eux, et dont le symbole s'obtient par la réunion des deux lettres qui diffèrent dans leurs symboles. Il est clair que chacun des trois triangles, ou binomes, peut être considéré comme l'associé des deux autres, et que leur ensemble est un terne de seconde espèce.

C'est toujours de celle-ci qu'il s'agira quand nous emploierons le mot *terne* tout seul : c'est qu'elle tient une place bien plus importante que l'autre dans la théorie qui nous occupe.

Puisque les deux triangles d'un couple ont dans leurs symboles une lettre commune, nous ne mettrons celle-ci qu'une fois dans l'écriture du couple

$$a\ bc, \text{ au lieu de } ab\,ac.$$

De même, puisque les trois triangles d'un terne ne contiennent que trois lettres dont chacune est redoublée, nous n'écrirons ces lettres qu'une fois

$$abc, \text{ au lieu de } ab\,bc\,ca.$$

5. En interchangeant les points (1) de toutes les manières possibles. on forme *soixante* hexagones différents. Le nombre des permutations de six chiffres est en effet $6.5.4.3.2$. Mais six permutations cycliques, telles que

$$123456,\ 234561,\ 345612,\ 456123,\ 561234,\ 612345,$$

donnent un seul et même hexagone. Dans les $5.4.3.2$ restantes deux inverses telles que

$$123456 \text{ et } 165432$$

ne doivent encore être comptées que pour une. Il en reste donc

$$5.4.3 = 60,$$

correspondant à autant d'hexagones.

Si, dans un quelconque de ces soixante hexagones, on prend trois côtés alternes, puis les trois autres, on a deux triangles Δ formant couple; tel est, par exemple, dans la figure 19 (p. 56), l'hexagone 125643, qui donne les deux triangles marqués *ab* et *ac*. Nous pouvons donc représenter ces hexagones par les couples de binomes, en nombre égal, que nous venons d'étudier; voici comment se fera le passage d'une notation à l'autre.

Pour avoir les deux triangles qui équivalent ensemble à un hexagone donné, soit 126543, il faut, partant d'un quelconque des six chiffres, lire cette permutation alternativement dans le sens direct et dans le sens inverse, en la coupant chaque fois par tranche de deux; cela donne, si l'on est parti du chiffre 1 :

$$\left.\begin{array}{l} 12\ 65\ 43 = ab \\ 13\ 45\ 62 = ae \end{array}\right\}, \qquad 126543 = ab\,ae.$$

Réciproquement, pour avoir l'hexagone que représentent ensemble deux triangles Δ (dont les symboles doivent avoir une lettre commune), il faut, profitant de ce qu'on peut intervertir à volonté les chiffres d'un binome et les binomes entre eux : 1° écrire à la file les six binomes de chiffres en les cueillant alternativement dans l'un et dans l'autre de telle sorte que chaque *second chiffre* soit suivi d'un *premier chiffre* identique; 2° supprimer les intervalles et compter chaque double lettre pour une seule :

$$\left.\begin{array}{l} ab = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ \qquad\quad \times \qquad \times \\ ac = 1\ 3\ 2\ 5\ 4\ 6 \end{array}\right\} = \overset{\frown}{12}.\overset{\frown}{25}.\overset{\frown}{56}.\overset{\frown}{64}.\overset{\frown}{43}.\overset{\frown}{31} = 125643.$$

La figure 19 montre le graphique de cette opération.

6. Au moyen des couples, le Tableau des soixante hexagones se forme facilement et se présente ainsi :

TABLEAU I. — LES SOIXANTE COUPLES.

a.bc,			[*a*]	*d.ab*,			[*d*]
a.bd,	*a.cd*,			*d.ac*,	*d.bc*,		
a.be,	*a.ce*,	*a.de*,		*d.ae*,	*d.be*,	*d.ce*,	
a.bf,	*a.cf*,	*a.df*,	*a.ef*	*d.af*,	*d.bf*,	*d.cf*,	*d.ef*
b.ac,			[*b*]	*e.ab*,			[*e*]
b.ad,	*b.cd*,			*e.ac*,	*e.bc*,		
b.ae,	*b.ce*,	*b.de*,		*e.ad*,	*e.bd*,	*e.cd*,	
b.af,	*b.cf*,	*b.df*,	*b.ef*	*e.af*,	*e.bf*,	*e.cf*,	*e.df*
c.ab,			[*c*]	*f.ab*,			[*f*]
c.ad,	*c.bd*,			*f.ac*,	*f.bc*,		
c.ae,	*c.be*,	*c.de*,		*f.ad*,	*f.bd*,	*f.cd*,	
c.af,	*c.bf*,	*c.df*,	*c.ef*	*f.ae*,	*f.be*,	*f.ce*,	*f.de*

On vient de voir comment les termes de ce Tableau peuvent être traduits en la forme ordinaire constituée par six chiffres. Voici comment on l'établissait sous cette forme avant que M. Veronese n'eût inventé les triangles Δ. Prenez une permutation quelconque des six chiffres; attribuez-leur les numéros I, II, III, IV, V, VI suivant le rang qu'ils y occupent; formez les trois permutations directes des chiffres impairs

I III V, III V I, V I III

et accolez-leur respectivement les trois permutations inverses des chiffres pairs

II VI IV, IV II VI, VI IV II;

faites ensuite la même opération sur chacun des termes ainsi obtenus. Si vous êtes parti de la permutation 123456, vous avez :

123456,	135264,	351426,	513642,
	156342,	312564,	534126,
	561234,	123456,	345612,
	615423,	231645,	453261,

où vous voyez d'abord trois termes qui sont identiques au premier

et doivent être supprimés : ce sont ceux de la troisième ligne. Les *dix* termes restants ne sont autre chose que l'équivalent en chiffres de ceux qui occupent le compartiment [*a*] du Tableau I; *si vous continuez avec un quelconque de ces termes, vous retombez toujours sur un des dix autres.* Pour aller plus loin, formez la ligne

123456, 143652, 163254, 123654, 143256, 163452

dont les six termes contiennent les trois chiffres impairs 1, 3, 5 toujours à la même place, et les trois autres 4, 5, 6 avec les six permutations dont ils sont susceptibles, savoir trois directes 246, 462, 624, et trois inverses 264, 426, 642. Puis faites avec chacun des cinq derniers termes les mêmes opérations que vous avez faites ci-dessus avec le premier; vous aurez cinq autres décades correspondant à celles *b*, *c*, *d*, *e*, *f* du Tableau I, et vous remarquerez que chacune est, comme la première, fermée sur elle-même.

7. De l'une ou de l'autre façon, nous voyons les soixante hexagones *se partager d'eux-mêmes en six décades* ou *figures,* que nous désignerons collectivement par la majuscule A, et individuellement par les minuscules *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Chacune contient cinq triangles Δ, savoir :

a	les triangles	*ab*,	*ac*,	*ad*,	*ae*,	*af*,
b	»	*ba*,	*bc*,	*bd*,	*be*,	*bf*,
c	»	*ca*,	*cb*,	*cd*,	*ce*,	*cf*,
d	»	*da*,	*db*,	*dc*,	*de*,	*df*,
e	»	*ea*,	*eb*,	*ec*,	*ed*,	*ef*,
f	»	*fa*,	*fb*,	*fc*,	*fd*,	*fe*,

a et *b* ont en commun le triangle *ab*; *b* et *c* ont deux à deux en commun le terne *ab bc ca*, tandis que *d*, *e*, *f* ont en commun le terne *de ef fd*; à un certain point de vue, ces ternes sont complémentaires.

8. Les six triangles Δ de deux ternes complémentaires *ont les mêmes côtés,* c'est-à-dire n'ont ensemble que neuf côtés au lieu de $6 \times 3 = 18$; en effet, le carré formé par les seconds membres

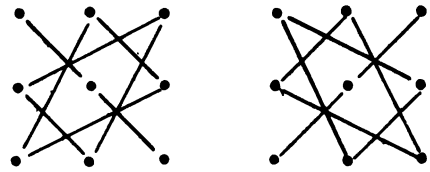
des égalités

$$\begin{array}{rcccc} ab = & 12 & 34 & 56 \\ ac = & 46 & 25 & 13 \\ bc = & 35 & 16 & 24 \\ & \| & \| & \| \\ & ef & de & df \end{array}$$

donne les côtés des triangles ab, ac, bc quand on le lit *par lignes*, et ceux des triangles ef, de, df quand on le lit *par colonnes*. Les neuf côtés sont

$$\begin{array}{ccc} 12, & 13, & 16, \\ 42, & 43, & 46, \\ 52, & 53, & 56. \end{array}$$

On peut encore relier ce dernier carré aux six triangles qu'il engendre, au moyen des deux diagrammes suivants : ces deux diagrammes, composés chacun de *trois figures de trois points* et complémentaires l'un de l'autre, sont usités aussi dans la théorie des déterminants.



Si l'on cueille successivement les termes du carré conformément au premier diagramme, puis conformément au second, on a les deux nouveaux carrés dont les lignes expriment les triangles Δ des deux ternes complémentaires abc, def :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 43 & 56, & 12 & 53 & 46, \\ 52 & 13 & 46, & 42 & 13 & 46, \\ 42 & 53 & 16; & 52 & 43 & 16. \end{array}$$

9. Les quinze droites fondamentales δ concourent *toutes* à la formation d'une quelconque des figures A, et comme celles-ci sont au nombre de six, *elles peuvent, de la même manière que les six points* (1), *servir de base à une notation de ces droites. C'est précisément cette notation qu'expriment les formules* (4), placées à côté des formules (3); les deux systèmes sont équivalents : le premier exprime les triangles Δ en fonction des droites δ, et le

second exprime celles-ci en fonction de ceux-là. On remarquera la symétrie qui les fait retomber l'un sur l'autre quand on interchange les lettres et les chiffres de même rang.

§ 13. — Les droites de Pascal.

1. Les quinze droites (2) ne sont évidemment pas de construction générale, car le nombre de leurs intersections, au lieu de quarante-cinq, serait alors $\frac{1}{2}.15.14 = 105$. Elles forment donc une *famille distincte parmi tous les systèmes de quinze droites existant dans le plan.* Nous allons rétrécir encore cette famille en supposant *que les six points* (1) *sont sur une section conique.*

On sait, depuis Pascal, que, dans ce cas, les points de concours des trois couples de côtés opposés de l'hexagone 123456, c'est-à-dire des droites

12 et 45, 23 et 56, 34 et 61

sont sur une même ligne droite, qu'on appelle maintenant *la droite de Pascal afférente à l'hexagone* 123456.

Chacun des soixante hexagones a sa droite de Pascal. Il existe donc, en connexion avec les quinze droites (2), *soixante droites de Pascal.* Steiner, qui fit cette remarque en 1828, vit que ces soixante droites se rencontraient par trois en vingt points, et il croyait, ce qui est inexact, que ces vingt points étaient par quatre sur quinze droites concourantes. La chose est beaucoup plus compliquée que cela.

La remarque de Steiner donna naissance à une longue suite de théorèmes, auxquels s'attachent les noms, pour ne citer que les principaux, de Plücker, Cayley, Salmon, Kirkman, miss Ladd, Hesse, von Staudt, Grossmann, Caporali, etc., surtout VERONESE, professeur à l'Université de Padoue, et RICHMOND, de *King's College,* à Cambridge. Dans deux Mémoires considérables publiés en 1877 et 1882 (1), l'auteur italien fait l'historique des travaux

(1) *Nuovi teoremi sull' « hexagrammum mysticum »* (*Atti dei Lincei,* série III, vol. I, 1877, p. 649-703).

Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrement pour n = 3, 4, 5, 6, en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique (*Annali di Matematica,* 2e série, t. II, 1882-1883, p. 96-236).

Ces deux Mémoires contiennent ensemble 289 théorèmes.

de ses devanciers et les complète par d'importantes découvertes personnelles; aussi le vaste ensemble de faits groupés autour du théorème de Pascal est-il souvent désigné par les mots *la figure*, ou *les propriétés de Veronese*.

Plus récemment, la question a été reprise en bloc, et de façon magistrale par Richmond, qui la rattache aux considérations les plus élémentaires de la Géométrie à quatre dimensions; une partie de notre Chapitre V ne sera guère qu'un résumé, plus écourté et plus imparfait que nous ne l'aurions voulu, des travaux de cet auteur (1).

Nous désignerons par

$$p(a.bc)=p(ab\,ac)$$

ou par

$$p(125643),$$

suivant que nous ferons usage de l'une ou de l'autre des deux notations exposées dans le paragraphe précédent, la droite de Pascal afférente à l'hexagone inscrit entre les parenthèses. La lettre p et les autres lettres, employées ci-après dans les mêmes conditions, ont un sens analogue à celui du signe fonctionnel f en analyse (2).

---

(1) *On Pascal's hexagram* (*Trans. of the Cambridge Philos. Soc.*, vol. XV, 1891, p. 201-302). — *On the figure of six points in space of four dimensions* (*Quart. Journ. of pure and applied Math.*, t. XXXI, 1900, p. 125-160). — *The figure formed from six points in space of four dimensions* (*Mathematische Annalen*, t. LIII, 1900, p. 161-176). — *Concerning the locus* $\Sigma x_r^3 = 0$, $\Sigma x_r = 0$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (*Quart. Journ. of pure and app. Math.*, t. XXXIV, 1903, p. 117-154).

(2) Nous réunissons ici les signes fonctionnels qui seront employés de cette façon dans le cours du présent Chapitre et du suivant :

pour les droites de Pascal.....	$p(a.bc)$
» les points de Kirkman.....	$k(a.bcd)$
» les points de Steiner.....	$s(abc)$
» les droites de Steiner (Chapitre IV).....	$t(ab)$
» les droites de Plücker.....	$u(ab)$
» les plans de Plücker (Chapitre IV).....	$\ddot{u}(ab)$
» les droites de Cayley.....	$\gamma(abc)$
» les points de Salmon.....	$m(ab)$

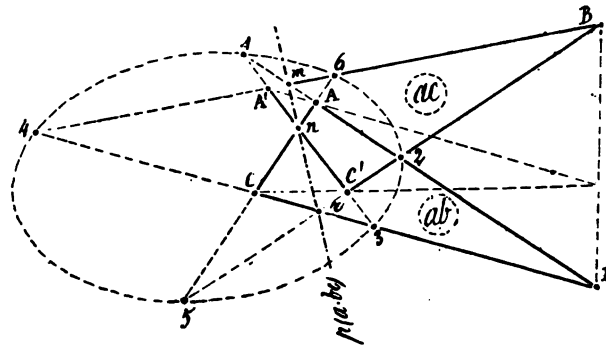
A l'occasion nous écrirons de même $\Delta(ab)$ et $j\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ pour les triangles Δ et les points j.

2. Considérons le couple

$$ab = 12\ 34\ 56, \qquad ac = 13\ 25\ 46;$$

ce sont les deux triangles ABC, A′B′C′ des figures 19 et 20. Si le point 6 se meut en décrivant la conique, tous les autres restant fixes, les rayons 46, 56 déterminent sur 12 et 13 deux divisions

Fig. 19.



Un couple de triangles A.

perspectives m et n; par suite la droite qui joint ces deux points tourne autour d'un point fixe r. Mais, quand 6 se pose successivement sur 2 et 3, cette droite prend les positions 25 et 34, dont l'intersection est ce point fixe r. Donc les trois points m, n, r, ou

$$12\ 46, \quad 34\ 25, \quad 56\ 13$$

sont en ligne droite; donc encore *les deux triangles d'un couple sont perspectifs.*

C'est *l'axe de perspective des deux triangles* qui est la droite de Pascal $p(a.bc)$. Il y a soixante droites de Pascal, et chacune contient, comme celle-là, trois points j. [*Voyez* encore, par exemple, $\frac{ae}{df}\ \frac{be}{df}\ \frac{ce}{df}$ sur $p(e.df)$ de la figure 2].

Elles appartiennent dix par dix aux six figures A, celles d'une même figure ayant toutes la même première lettre.

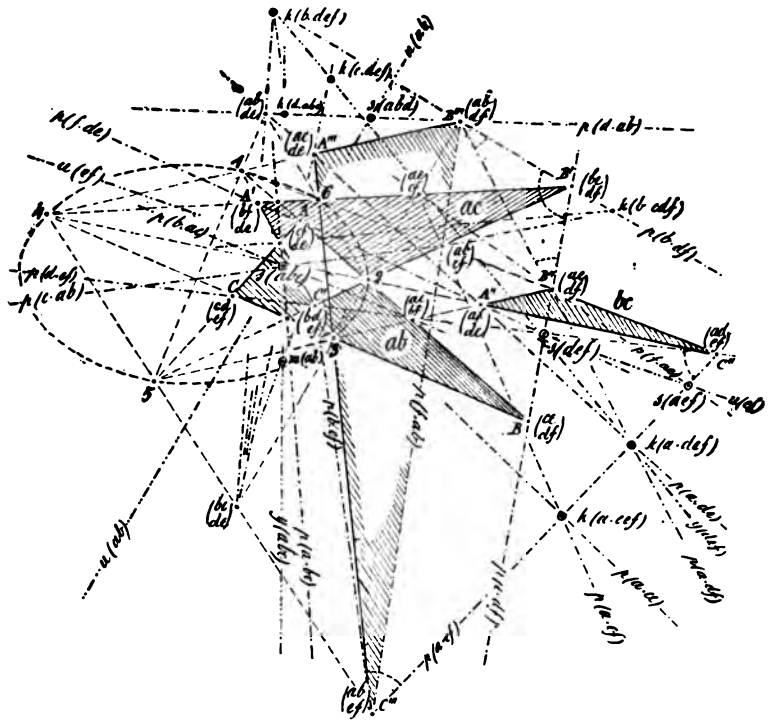
Les trois points j que nous avons appelés m, n, r ont pour sym-

boles

$$\binom{ad}{bc}, \binom{ae}{bc}, \binom{af}{bc},$$

dont on voit de suite la formation au moyen de celui $p(a.bc)$.

Fig. 20.



Un terne de triangles Δ.

Inversement, la confrontation de ces symboles montre qu'il passe par le point $\binom{ab}{cd}$ les droites

$$p(a.cd),\quad p(b.cd),\quad p(c.ab),\quad p(d.ab);$$

donc *il passe quatre droites p par chaque point j*. C'est ainsi qu'on voit partir en faisceau serré, du point $\binom{bc}{de}$ placé au bas de la

figure 20, quatre droites qui sont, de la gauche à la droite,

$p(b.de)=p(132645)$, se dirigeant sur $\binom{bf}{de}$, $\binom{ba}{de}$ et $k(b.def)$,

$p(d.bc)=p(123645)$, » $\binom{ad}{bc}$ et $\binom{df}{bc}$,

$p(e.bc)=p(132654)$, » $\binom{ae}{bc}$ et $\binom{ef}{bc}$,

$p(c.de)=p(123654)$, » $\binom{ac}{de}$, $\binom{cf}{de}$ et $k(c.def)$;

de même, du point $\binom{bc}{df}$ situé dans le haut, partent les quatre droites

$$p(162354,\ 152364,\ 153264,\ 163254),$$

et il serait facile de multiplier ces exemples sans sortir de notre figure.

§ 14. — Les points de Kirkman.

1. En associant trois par trois les cinq triangles *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af* de la figure *a*, on forme $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10$ combinaisons qui sont des ternes de première espèce (p. 48); une d'elles sera, par exemple, *ad ae af* et nous l'écrirons plus brièvement *a.def*. En les disposant ainsi,

$$\begin{array}{llll} a.def, & & & \\ a.cef, & a.bef, & & \\ a.cdf, & a.bdf, & a.bcf, & \\ a.cde, & a.ade, & a.bce, & a.bcd, \end{array}$$

on voit qu'elles correspondent chacune à chacune aux dix termes qui forment le premier compartiment du Tableau I, page 51, la correspondance consistant en ce que, si l'on ne tient pas compte de *a*, les deux qu'on voit d'une part et les trois qu'on voit d'autre part font ensemble les cinq lettres *b*. *c*, *d*, *e*, *f*.

Si l'on supprime une des trois lettres qui suivent le point, ce qui peut se faire de trois manières, on a trois couples, ou hexagones, qui sont, pour le premier terne par exemple,

$$a.de,\quad a.df,\quad a.ef.$$

Les droites de Pascal de ces trois hexagones sont concourantes.

Pour le démontrer, considérons, sur la figure 20, les deux triangles $A''B''C''$ et $A'''B'''C'''$; le premier, entièrement ombré, n'est autre que $\Delta(bc) = 16\ 24\ 35$; le second, ombré seulement en partie, a pour côtés les droites fondamentales 14, 36 et la droite de Pascal déterminée par les points $\binom{ab}{cf}$, $\binom{ab}{df}$, $\binom{ab}{ef}$. On peut faire correspondre les côtés et les sommets de ces triangles comme ceci :

$$\begin{array}{cccccc} A''B'', & B'', & B''C'', & C'', & C''A'', & A'', \\ A'''B''', & B''', & B'''C''', & C''', & C'''A''', & A''', \end{array}$$

ou, suivant notre notation :

$$\begin{array}{cccccc} ad\ bc\ ef, & \binom{ae}{df}, & af\ bc\ de, & \binom{ad}{ef}, & ae\ bc\ df, & \binom{af}{de}, \\ ad\ bf\ ce, & \binom{ab}{df}, & p(f.ab), & \binom{ab}{ef}, & ae\ cd\ bf, & \binom{ac}{de}; \end{array}$$

on voit que les côtés correspondants ont pour intersections les points

$$\binom{be}{cf} = 16\ 25, \quad \binom{ba}{cf} = 24\ 36, \quad \binom{bd}{cf} = 14\ 53,$$

lesquels sont sur la droite de Pascal $p(b.cf) = 142536$, c'est-à-dire sont en ligne droite. On en conclut que les droites joignant les sommets correspondants, savoir :

$$C''C''' = p(a.ef), \qquad A''A''' = p(a.de), \qquad B''B''' = p(a.df),$$

concourent en un même point, *ce que nous voulions démontrer*. On appelle ce point *un point de Kirkman*, et nous le désignerons par $k(a.def)$.

Chaque droite de Pascal $p(a.bc)$ porte trois points de Kirkman : $k(a.bcd)$, $k(a.bce)$, $k(a.bcf)$ et il passe par chaque point de Kirkman $k(a.def)$ trois droites de Pascal : $p(a.de)$, $p(a.df)$, $p(a.ef)$.

Les douze droites p passant par les trois sommets du triangle bc donnent quatre points k qui sont

$$k(a.def), \quad k(d.aef), \quad k(e.adf), \quad k(f.ade),$$

c'est-à-dire ont leurs symboles formés des quatre mêmes lettres.

On appelle *droites* v (Veronese) toute droite passant par deux pareils points. Chacune passe en outre par un point j, qui est $\binom{ad}{bc}$ pour les deux premiers. Il y a 90 droites v, il en passe trois par chaque point k et deux par chaque point j.

2. Le lecteur verra de suite comment les symboles donnent la solution de questions comme celles-ci : — Quelle est la droite p dont un point donné k est le correspondant, ou inversement; — quelles sont les trois droites p qui passent par un point donné k, ou inversement les trois points qui sont sur une droite donnée; — voir si deux droites données p se croisent sur un point k et, en ce cas, quelle est la troisième qui y passe avec elles, etc.

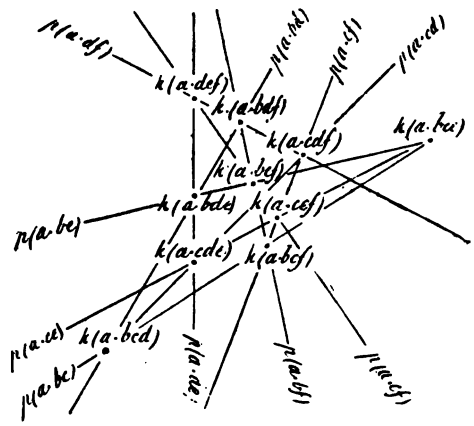
Ces transformations sont beaucoup moins simples avec la notation ordinaire. Par exemple, si l'on veut les droites de Pascal qui passent par un point donné $k(123456)$, il faut : 1° écrire à la file les trois chiffres de rang impair, puis les trois de rang pair en intervertissant l'ordre des deux derniers : c'est une des droites demandées $p(135264)$; — 2° dans celle-ci, sans toucher aux deux chiffres du milieu, intervertir ensemble le premier et le second, puis le cinquième et le sixième; c'est la seconde droite : $p(153624)$; — 3° dans la même, sans toucher aux chiffres extrêmes, intervertir ensemble les deuxième, troisième, puis les quatrième et cinquième : c'est la troisième droite : $p(315264)$.

3. Il y a donc correspondance univoque entre les dix points k et les dix droites p. La figure 21 représente les uns et les autres. L'ensemble de l'hexagramme comprend six figures parallèles à celle-là et correspondant aux six décades A. Chaque figure est fermée sur elle-même.

La subdivision en six décades ou figures, avec les développements qu'elle a pris entre ses mains, est assurément la contribution la plus importante apportée par Veronese à la théorie de l'hexagramme. Les six décades correspondent *aux six fonctions remarquables à six valeurs* trouvées par J.-A. Serret dans son Mémoire *Sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres de toutes les manières pos-*

sibles (1). Elles se rattachent ainsi à la difficile théorie des *groupes de substitutions,* que nous ne cesserons pas de côtoyer jusqu'à la fin du Chapitre V, mais dans lequel nous nous abstiendrons de pénétrer; le lecteur qui voudrait le faire pourra consulter, outre

Fig. 21.



Les droites de Pascal et les points de Kirkman de la première décade.

le Mémoire de Veronese de 1882 cité page 54, les travaux que nous mentionnons en note (2).

C'est dans cette théorie que se trouve la meilleure raison du groupement présenté par les formules (3) et (4), page 46 : « Formons, dit Serret, les produits deux à deux des six lettres a, b, c, d, e, f et faisons les sommes des trois produits correspondant aux transpositions équivalentes que nous avons écrites plus haut.

---

(1) *Journal de Liouville*, 1850, p. 70 et *Algèbre supérieure*, 4e édition, t. II. 1878, p. 433.

(2) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 316-368. — PASCAL. *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di terzo ordine et sui gruppi ad esso isomorfi* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XX, 1892, p. 163-226 et t. XXI, 1893, p. 85-137). — DICKSON, *A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines of a cubic surface* (*Quart. Journ. of Math.*, vol. XXXIII, 1902).

On aura les cinq fonctions suivantes

$$ab + ce + df$$
$$af + cd + be$$
$$ad + bc + ef$$
$$ae + de + bf$$
$$ac + bd + cf \text{ »}$$

qui ne sont autre chose, en supprimant les signes +, que les termes 65, 45, 35, 25, 15 des équations (4).

§ 15. — Les points de Steiner.

Considérons les triangles d'un terne de second espèce *ab ac bc* (*fig.* 20). Leurs côtés homologues, qui se placent les uns sur les autres comme ceci :

AB, BC, CA $=12, 34, 56 = ab\ cd\ ef,\ ab\ cf\ de,\ ab\ ce\ df,$
A′B′, B′C′, C′A′ $=46, 25, 13 = ac\ bd\ ef,\ ac\ bf\ de,\ ac\ be\ df,$
A″B″, B″C″, C″A″ $=35, 16, 24 = ad\ bc\ ef,\ af\ bc\ de,\ ae\ bc\ df,$

donnent, par leurs intersections deux à deux, les trois lignes de Pascal

$$p(a.bc) = 12\ 46,\ 34\ 25,\ 56\ 13 = \binom{ad}{bc},\ \binom{af}{bc},\ \binom{ae}{bc},$$
$$p(b.ca) = 12\ 35,\ 34\ 16,\ 56\ 24 = \binom{bd}{ac},\ \binom{bf}{ac},\ \binom{be}{ac},$$
$$p(c.ab) = 46\ 35,\ 25\ 16,\ 13\ 24 = \binom{cd}{ab},\ \binom{cf}{ab},\ \binom{ce}{ab}.$$

Or, si on lit par colonnes les carrés que forment, soit les deuxièmes, soit les troisièmes membres, on a les sommets des trois triangles *ef*, *df*, *de*, lesquels forment aussi un terne de seconde espèce et, par suite, sont perspectifs deux à deux; il s'ensuit que *les trois lignes concourent en un même point.* On appelle ce point un *point de Steiner,* et nous le désignerons par $s(abc)$, la notation entre les parenthèses dérivant de celle du terne générateur *ab bc ca* comme il a été dit page 50.

Les sommets homologues des mêmes triangles ab, ac, bc, savoir :

$$C,\ B,\ A = \binom{cd}{ef}, \binom{ce}{df}, \binom{cf}{de} = 56\ 43,\ 43\ 12,\ 12\ 56,$$

$$C',\ B',\ A' = \binom{bd}{ef}, \binom{be}{df}, \binom{bf}{de} = 13\ 52,\ 52\ 64,\ 64\ 13,$$

$$C'',\ B'',\ A'' = \binom{ad}{ef}, \binom{ae}{df}, \binom{af}{de} = 24\ 16,\ 16\ 35,\ 35\ 24,$$

sont par trois sur les trois lignes de Pascal

$$p(d.ef) = \binom{cd}{ef}, \binom{bd}{ef}, \binom{ad}{ef} = 34\ 56,\ 12\ 24,\ 14\ 26,$$

$$p(e.df) = \binom{ce}{df}, \binom{be}{df}, \binom{ea}{df} = 12\ 34,\ 24\ 56,\ 13\ 56,$$

$$p(f.de) = \binom{cf}{de}, \binom{bf}{de}, \binom{af}{de} = 12\ 56,\ 13\ 46,\ 23\ 45,$$

qui sont afférentes au terne *ef df de* complémentaire du précédent. Leur commune intersection est le point de Steiner $s(def)$, duquel nous dirons qu'il est *conjugué* de $s(abc)$.

Le nombre des points de Steiner est $\frac{6.4.5}{1.2.3} = 20$, conjugués deux à deux. Ce sont :

abc, *abd*, *abe*, *abf*,	*def*, *cef*, *cdf*, *cde*,	
acd, *ace*, *acf*,	*bef*, *bdf*, *bde*,	
ade, *adf*,	*bcf*, *bce*,	
aef;	*bcd*.	

On dit que le point $s(abc)$ est commun aux trois figures a, b, c en ce sens qu'il repose sur des éléments de ces trois figures. Les quatre points $s(abc, abd, abe, abf)$, à la génération desquels concourt le triangle ab, sont communs aux figures a et b. Enfin les dix points $s(abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef)$ appartiennent à la figure a; leurs conjugués sont communs aux cinq autres.

Dans la notation ordinaire, on peut, sans la traduire en couples, reconnaître que trois droites de Pascal concourent en un point de Steiner à ce que, dans leur notation, *les chiffres de rang pair sont les mêmes et que ceux de rang impair forment un cycle, ou inver-*

sement. Telles sont les trois droites

$$p(123456),\quad p(143652),\quad p(163254),$$

dont le point de Steiner sera désigné par $s(135.246)$, et ces trois autres

$$p(123654),\quad p(163452),\quad p(143256),$$

dont le point de Steiner $s(135.264)$ est le conjugué du précédent. Dans ce symbole, l'ordre cyclique dans chaque groupe de trois importe seul et un nouveau point de Steiner arrive si on le change; on a le point conjugué si on le change seulement dans un des groupes.

§ 16. — Les droites de Plücker.

Considérons trois des quatre points de Steiner communs aux deux figures a et b, par exemple (*fig.* 22)

$$s(abc,\quad abd,\quad abe).$$

Il passe par eux, respectivement, les droites de Pascal

$$p(a.bc),\quad p(a.bd),\quad p(a.be)$$

qui font ensemble un triangle ayant pour sommets les points de Kirkman

$$k(a.bcd),\quad k(a.bde),\quad k(a.bec).$$

Il passe encore par eux, respectivement, les droites

$$p(c.ab),\quad p(d.ab),\quad p(e.ab),$$

qui font ensemble un triangle ayant pour sommets les points j

$$\binom{ab}{cd},\quad \binom{ab}{de},\quad \binom{ab}{ec}.$$

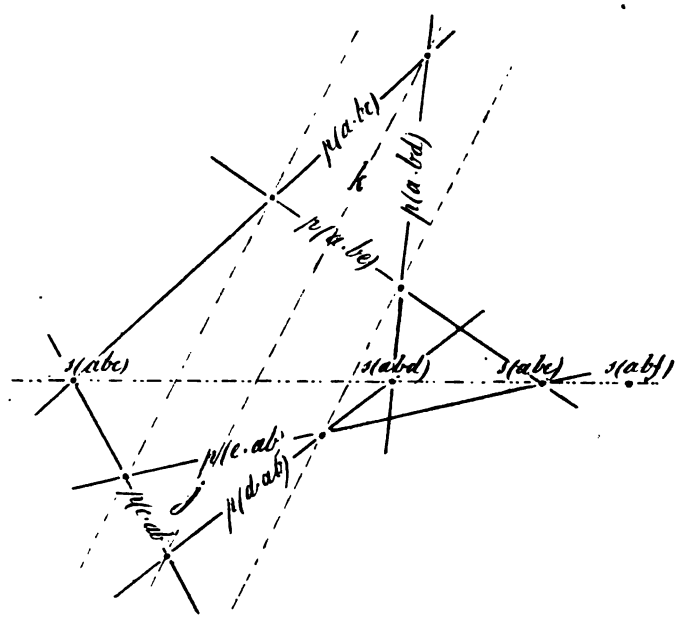
Or, les droites joignant les points correspondants de ces deux triangles k et j sont les droites de Pascal

$$p(a.cd),\quad p(a.de),\quad p(a.ce),$$

lesquelles sont concourantes (au point de Kirkman $a.cde$). Donc les deux triangles sont perspectifs, et les points de Steiner considérés *sont en ligne droite* (1).

Si on leur ajoute le quatrième point $s(abf)$, il est clair qu'on

Fig. 22.



La première droite de Plücker.

pourra faire le même raisonnement pour trois quelconques des quatre points, d'où il suit qu'ils sont tous les quatre sur une même ligne droite. On appelle cette droite une *droite de Plücker;* nous la désignerons par $u(ab)$, le binome entre parenthèses exprimant qu'elle est déterminée par le triangle ab et appartient comme lui aux deux figures a et b.

Les droites de Plücker sont au nombre de *quinze,* portant chacune quatre points de Steiner, dont chacun est commun à trois

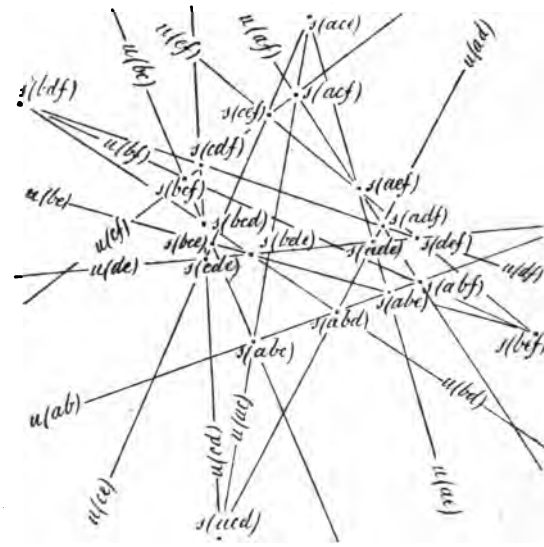
(1) Dans le cas particulier que représente la figure 22, les droites projetantes sont parallèles, et le point $k(a.cde)$ est à l'infini.

d'entre elles. C'est une configuration que définit le Tableau :

$u.\ ab = s.$	$abc, abd, abe, abf,$	$u.\ bf = s.$	$abf, bcf, bdf, bef;$
ac	$abc, acd, ace, acf,$	cd	$acd, bcd, cde, edf,$
ad	$abd, acd, ade, adf,$	ce	$ace, bce, cde, cef,$
ae	$abe, ace, ade, aef,$	cf	$acf, bcf, cdf, cef,$
af	$abf, acf, adf, aef;$	de	$ade, bde, cde, def,$
bc	$abc, bcd, bce, bcf,$	df	$adf, bdf, cdf, def,$
bd	$abd, bcd, bde, bdf,$	ef	$aef, bef, cef, def,$
be	$abe, bce, bde, bef,$		

et que représente la figure 23. On la retrouve dans une autre

Fig. 23.



Les droites de Plücker et les points de Steiner.

théorie sous cette autre forme : *la projection des intersections de six plans de l'espace,* laquelle peut se résoudre de vingt manières en triangles perspectifs deux à deux.

Les droites de Plücker sont en correspondance univoque :

1° Avec les triangles Δ;

2° Avec nombre égal de quadrilatères dont les quatre côtés sont des droites de Pascal et les six sommets des points j;

3° Avec nombre égal de *couples de quadrilatères* dont les quatre côtés sont aussi des droites de Pascal et les six sommets des points de Kirkman.

§ 17. — Les droites de Cayley.

Au paragraphe 14, les droites de Pascal

$$p(a.df),\quad p(a.ef),\quad p(a.de)$$

passant par les trois sommets du triangle $\Delta(bc)$, nous ont donné le point de Kirkman $k(a.def)$. En remplaçant a par b, puis par c, nous aurions de même trois droites de Pascal passant par les trois sommets du triangle $\Delta(ac)$ et donnant le point de Kirkman $k(b.def)$, puis trois autres passant par ceux de $\Delta(ab)$ et donnant $k(c.def)$. On voit sur la figure 20 que ces trois points sont sur une même ligne droite qui contient aussi le point de Steiner $s(def)$; nous allons montrer en toute rigueur que les quatre points

$$s(def),\quad k(a.def),\quad k(b.def),\quad k(c.def)$$

sont bien en ligne droite.

En effet les trois triangles $B'B''B'''$ et $C'C''C'''$ sont perspectifs parce que les lignes $B'C'$ ou 25, $B''C''$ ou 16 et $B'''C'''$ ou $p(f.ab)$ se rencontrent en un même point $\begin{pmatrix} ab \\ cf \end{pmatrix}$ (1). Donc les points d'intersection des côtés correspondants

$$\begin{aligned} B'B''C'C'' &= p(e.df)\,p(d.ef) = s(def) \\ B''B'''C''C''' &= p(a.df)\,p(a.ef) = k(a.def) \\ B'B'''C'C''' &= p(b.df)\,p(b.ef) = k(b.def) \end{aligned}$$

sont en ligne droite.

Ce sont trois des quatre points que nous considérons. Mais on arriverait à la même conclusion en associant au premier, $s(def)$, deux quelconques des trois autres, d'où il suit que les quatre points sont en ligne droite.

---

(1) Parce que la ligne de Pascal $p(f.ab) = p(163254)$ est déterminée par les trois points $16\,25 = \begin{pmatrix} ab \\ cf \end{pmatrix}$, $63\,54 = \begin{pmatrix} ab \\ ef \end{pmatrix}$, $14\,23 = \begin{pmatrix} ab \\ df \end{pmatrix}$.

En observant que le premier est le point de Steiner conjugué de $s(abc)$ et que les trois autres sont les points de Kirkman correspondants des trois droites de Pascal $p(a.bc)$, $p(b.ca)$, $p(c.ab)$ qui passent par $s(abc)$, on énoncera ainsi le théorème : ***Les points de Kirkman correspondant aux trois droites de Pascal qui passent par un point donné de Steiner sont en ligne droite, et cette droite contient aussi le point de Steiner conjugué de celui qui est donné.*** On appelle ces droites *des droites de Cayley* (1), et nous désignerons par $y(def)$ celle qui contient les quatre points écrits en tête de ce paragraphe : elle est conjuguée de $y(abc)$, qui, elle, passe par $s(abc)$ et les trois points de Kirkman caractérisés par les mêmes lettres. Les droites de Cayley sont au nombre de vingt; elles correspondent chacune à chacune aux vingt points de Steiner. On convient de dire qu'elles appartiennent respectivement aux mêmes figures A que leurs points de Steiner correspondants. Une droite de Cayley est commune à *trois figures* et sa conjuguée aux trois autres; quatre droites de Cayley sont communes à *deux figures,* et les quatre points de Steiner qui leur correspondent sont sur une droite de Plücker; enfin *dix droites* de Cayley appartiennent à *une figure.*

§ 18. — Les points de Salmon.

Considérons les quatre droites de Cayley

$$y(def,\ cef,\ bef,\ aef).$$

Sur les trois premières sont respectivement les points de Kirkman

$$\begin{array}{lll} k(a.def) & \text{et} & k(b.def) \\ k(a.cef) & \text{et} & k(b.cef) \\ k(a.cdf) & \text{et} & k(b.cdf); \end{array}$$

si l'on réunit les premiers de chaque couple, puis les seconds, on reconnaît les sommets de deux triangles dont les côtés sont

$$p(a.ef),\ p(a.df),\ p(a.cf) \quad \text{et} \quad p(b.ef),\ p(b.df),\ p(b.cf),$$

(1) On dit aussi *droites de Cayley-Salmon,* parce qu'elles furent découvertes à peu près en même temps par ces deux auteurs.

et ces triangles sont perspectifs parce que les côtés se rencontrent par deux en des points

$$\binom{ab}{ef}, \quad \binom{ab}{df}, \quad \binom{ab}{cf}$$

qui sont sur une même ligne droite $p(f.ab)$.

Comme on peut faire un raisonnement analogue sur trois quelconques des droites considérées, il s'ensuit qu'elles passent toutes les quatre par un même point. Donc : *les quatre droites de Cayley correspondant aux quatre points de Steiner qui s'alignent sur une droite de Plücker concourent en un même point.* On l'appelle *un point de Salmon.* Il y a quinze points de Salmon, lesquels correspondent un à un aux quinze droites de Plücker et aux quinze triangles Δ. Nous les désignerons de même par un des binomes ab, ac, ..., et celui-ci sera précédé du signe fonctionnel m.

Sur la droite de Cayley $y(def)$, il y a trois points de Salmon $m(de)$, $m(ef)$, $m(fd)$. Donc les points de Salmon sont trois par trois sur les droites de Cayley. Les cinq points $m(ab, ac, ad, ae, af)$ sont unis deux à deux par les dix droites de Cayley appartenant à la figure a; les dix restants sont trois par trois sur les dix autres de Cayley.

§ 19. — Vue d'ensemble.

Résumant à un certain point de vue ce qui précède, on peut dire :

1° L'identité des notations enfermées sous les signes p et k, s et y, u et m montre qu'il y a correspondance entre les soixante droites de Pascal et les soixante points de Kirkman, les vingt droites de Cayley et les vingt points de Steiner, les quinze droites de Plücker et les quinze points de Salmon (1);

2° Il y a : sur chaque droite p, trois points k et un point s, — sur chaque droite u, quatre points s, — sur chaque droite y, un point s, trois points k, trois points n. Et il passe : par chaque

(1) Bien que le nombre *six* soit à la fois celui des points fondamentaux et celui des figures A, on ne peut pas faire correspondre ces deux ensembles terme à terme.

point k, trois droites p et une droite y, — par chaque point s, trois droites p, trois droites u et une droite y, — par chaque point n, quatre droites y.

Mais, de vue d'ensemble proprement dite, il n'y en a pas. Dans le cours du XIX^e^ siècle, les théorèmes se sont accumulés sans ordre les uns sur les autres, engendrant peu à peu une vaste figure que son étendue et sa complication ne permettent pas au dessinateur de faire en épure, ni à l'esprit de se représenter, à laquelle il est même difficile de trouver une nomenclature et une notation (1) : « *I have constructed,* dit Cayley (*Collected math. papers*, t. VI, p. 122), *on a very large scale a figure of the sixty pascalian lines and the forty-five pascalian points; but the figure is, from its complexity, and the inconvenient way in which the points are either crowded together or fly off to a great distance, almost unintelligible.* »

Nous en restons là, ayant à peine effleuré le sujet et renvoyant aux Mémoires de Veronese et de Richmond le lecteur qui voudrait l'étudier davantage sans sortir de la Géométrie plane. Il aura affaire d'abord à de nouvelles droites dans lesquelles entrent comme éléments les points j (2), puis aux relations des figures A entre elles..., etc. En nous suivant il aura peut-être été amené à se poser ces deux questions : 1° *Cette figure si étendue, si encombrée et si décousue ne serait-elle pas une forme secondaire d'une autre à la fois plus simple et plus générale?* 2° *Existe-t-il dans le plan d'autres familles de quinze droites jouissant aussi de cet ensemble de propriétés qui distingue la famille prenant naissance sur six points d'une conique?* C'est à ces deux questions que répondent les deux Chapitres suivants.

Nous étendrons le nom d'*hexagramme de Pascal* à la vaste figure que nous venons de faire entrevoir au lecteur. Le capitaine d'artillerie Brianchon découvrit en 1806 que, *lorsque six droites* A, B, C, D, E, F *sont tangentes à une conique, les diagonales joignant les trois paires de sommets opposés* A *et* D, B *et* E, C *et* F *concourent en un même point.* Ce théorème peut être pris à son tour comme le point de départ d'une suite de constructions et de

(1) Celle adoptée ici procède de Veronese, Cremona, miss Ladd et Caporali.

(2) Par exemple, les droites ν mentionnées page 22.

propositions se développant corrélativement à la précédente. Cet autre ensemble, que nous appellerons l'*hexagramme de Brianchon* si, par hasard, nous avons besoin de le considérer en lui-même, n'est autre chose que le *pendant dualistique* du précédent. La Géométrie moderne associe étroitement deux formes ayant ensemble cette relation, et passe de l'une à l'autre sans aucune formalité ; nous ferons de même. C'est ordinairement la première que nous aurons en vue, mais le lecteur est prévenu pour le cas où certaines directions du raisonnement nous achemineraient vers la seconde.

CHAPITRE IV.

LA SURFACE DU TROISIÈME DEGRÉ.

§ 20. — Surface de Klein.

Avant de livrer son manuscrit à la publicité des *Atti dei Lincei*, Veronese le communiqua à Cremona, qui s'était déjà occupé fructueusement de la *théorie des surfaces du troisième degré*. Celui-ci fut conduit à rattacher à cette théorie toute la suite des propositions, et publia le résultat de son étude dans le même Volume des *Atti*. Nous exposerons sommairement sa méthode, mais il nous faut montrer d'abord cette surface du troisième degré qui, avec ses fameuses *vingt-sept droites*, connues seulement depuis 1849, apporte un concours assez inattendu. C'est ce que nous allons essayer de faire en la dégageant autant que possible de l'habituel cortège des équations et de l'encombrement des démonstrations.

Pendant le demi-siècle qui vient de finir, elle a été très en faveur auprès des mathématiciens, qu'elle reposait des coniques et des quadriques : d'après un relevé fait en 1897 par J.-H. Hill (1), il n'avait pas été publié sur son compte, à cette date, moins de *deux cent cinq* Mémoires et, ajoute notre auteur, ils méritent presque tous d'être lus attentivement (*nearly all are worthy of a close perusal*). Elle a alimenté pendant quelque temps les questions de concours. Elle a beaucoup exercé la sagacité des constructeurs de modèles. La librairie Martin Schilling, à Halle, a publié une collection de vingt-sept reliefs en plâtre, qui en représentent divers

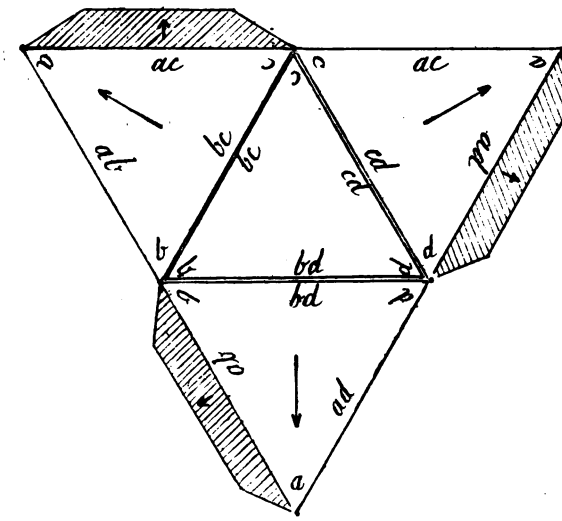
(1) *Bulletin of the american math. Soc.*, numéro de janvier 1897. Nous ne croyons pas que la liste des ouvrages énumérés par M. Hill ait été publiée. Avec ce qui s'est fait depuis 1897, on peut estimer à 250 au moins le nombre des publications existant aujourd'hui, où il est traité des surfaces du troisième degré.

cas particuliers, et où l'on paraît s'être attaché surtout à montrer la génération des points singuliers des divers ordres.

Des préoccupations d'ordre analytique dominent presque tous ces travaux, et nous n'y avons pas trouvé ce que nous cherchions. une évocation suffisamment claire et complète des *formes de la surface*. Nous nous proposons de remplir cette lacune. Nous espérons y arriver en passant par une forme particulière qu'on appelle la *surface de Klein* (1), et qui, pourrait-on dire, occupe dans la famille des surfaces du troisième degré une situation analogue à celle du *cône ordinaire* dans la famille des surfaces du second degré.

Pour construire la surface de Klein, posons devant nous, dans l'espace, une pyramide triangulaire renversée (*fig.* 24 et 25). Sa

Fig. 24.



Développement du tétraèdre fondamental.

base, ou face supérieure, *bcd*, est dans un plan horizontal III; la face *abd*, légèrement inclinée d'arrière en avant, est de notre côté; elle cache l'arête *ac*, inclinée d'avant en arrière. Nous suppose-

(1) Félix Klein, *Ueber Flächen dritter Ordnung* (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873).

rons les six arêtes et les quatre faces prolongées indéfiniment dans tous les sens, et nous appelons cette figure géométrique : *le tétraèdre*.

Un peu plus bas, menons un autre plan horizontal II et marquons-y les traces des six arêtes

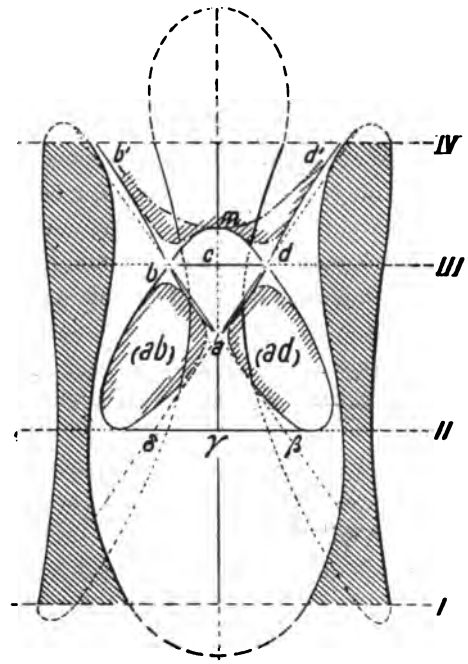
$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad cd,\quad db,\quad bc$$

en les désignant respectivement par les lettres

$$\beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \beta',\quad \gamma',\quad \delta'.$$

A raison de la manière dont nous avons placé les deux plans en

Fig. 25.



Surface de Klein.

vue de simplifier le dessin, les trois derniers points sont à l'infini du second, mais ils n'ont pas moins dans celui-ci une position déterminée qu'on pourra se figurer si l'on veut, en supposant qu'au lieu d'être horizontal il a une légère pente, telle qu'aucune

des trois lignes *cd*, *bd*, *bc* ne lui soit parallèle. Menons dans ce plan les droites $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ qui joignent les traces des *arêtes opposées*, c'est-à-dire des arêtes dont les notations n'ont pas de lettre commune; nous les appellerons *les transversales*.

Cela posé, *les neuf droites*

$$ac,\quad ad,\quad ab,\quad cd,\quad db,\quad bc,\quad \beta\beta',\quad \gamma\gamma',\quad \delta\delta'$$

sont des droites de la surface, en ce sens qu'elles y ont tous leurs points, et elles sont les seules dans ce cas. Elles vont nous servir de charpente pour la construire.

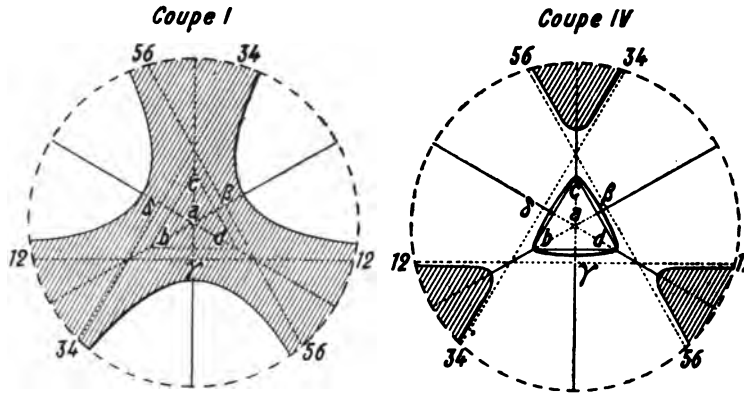
Transportons-nous au point *a*. Au-dessus, nous en voyons partir des formes convexes, d'abord tangentes intérieurement à un cône du second degré qui a pour sommet le point *a*, mais s'en écartant bientôt, dans les intervalles des droites *ab*, *ac*, *ad*, pour *s'appliquer presque* sur les faces planes du tétraèdre. Au-dessous, ce sont des formes concaves, tangentes extérieurement au même cône, et pressées de s'en séparer. Nous sommes en *a* en un *point singulier* de notre surface. C'est le plus simple de tous ceux que connaît la théorie; on l'appelle un *point double*, un *point conique*, un *point nodal*...., et on le caractérise par ceci que *le lieu des tangentes à la surface en un pareil point n'est pas un plan, comme à l'ordinaire, mais un cône du second degré*. Les trois droites *ab*, *ac*, *ad* sont communes dans toute leur étendue au cône et à la surface : elles sont *leur intersection*.

Les choses se passent de la même manière aux trois points *b*, *c*, *d* qui sont aussi des points coniques. Nous avons en somme, *en dedans* des quatre points, une *sorte de tétraèdre* qu'on peut faire dériver du tétraèdre primitif en bombant légèrement les quatre faces, sans que les arêtes subissent la moindre atteinte.

De l'autre côté de ces quatre points, la surface se développe en deux nappes infinies qu'on peut se représenter au moyen de la figure 25, complétée par les coupes de la figure 26. Ces deux figures sont arrêtées à un *cylindre vertical;* la figure 25 l'est en outre à *deux plans perpendiculaires à ce cylindre*. La première montre une sorte de collerette formée de trois ailes très prononcées, alternant avec autant de dépressions; les droites *ab*, *ac*, *ad* courent sur les crêtes des premières et, par leurs prolongements $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, sur les fonds des secondes; les six autres en suivent les

flancs. Les figures 26 sont des coupes par des plans I et IV situés plus haut ou plus bas que le tétraèdre, mais ne sont guère faites à l'échelle et doivent être considérées comme de simples schémas;

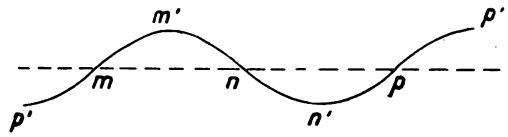
Fig. 26.



Sections horizontales.

ce sont des courbes du troisième degré formées de trois branches à forme hyperbolique, plus un ovale imaginaire, qui devient réel si la section rencontre le tétraèdre; les hachures y correspondent à des parties de la surface situées au-dessus de la sec-

Fig. 27.



A l'infini.

tion, et les blancs à des parties situées au-dessous. Si les plans I et IV s'éloignent à l'infini, ces deux formes ont pour limite commune celle que représente la figure 27 : *une courbe du troisième degré composée d'une seule branche avec trois inflexions m, n, p.*

La surface est à *courbure elliptique* sur les quatre faces du tétraèdre central et à *courbure hyperbolique* partout ailleurs. Les quatre faces du tétraèdre s'appellent des *triangles de la sur-*

face et ne doivent pas être confondues avec les *triangles plans* qui ont mêmes pourtours.

Pour achever de fixer les idées sur son compte, disons que notre surface a pour équation, en coordonnées cartésiennes x, y, z :

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant des polynomes quelconques du premier degré en x, y, z. Les *six arêtes* sont

$$\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_3=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_4=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_2=0,\\ \alpha_4=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_3=0,\\ \alpha_4=0;\end{cases}$$

les *trois transversales :*

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \alpha_3+\alpha_4=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_4=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_4=0\ (^1),\\ \alpha_2+\alpha_3=0;\end{cases}$$

le *plan des transversales :*

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0;$$

les *quatre faces planes du tétraèdre :*

$$\alpha_1=0,\qquad \alpha_2=0,\qquad \alpha_3=0,\qquad \alpha_4=0;$$

les *six plans passant par une arête et la transversale qu'elle rencontre :*

$$\begin{array}{lll}\alpha_1+\alpha_2=0, & \alpha_1+\alpha_3=0, & \alpha_1+\alpha_4=0,\\ \alpha_2+\alpha_3=0, & \alpha_2+\alpha_4=0. & \alpha_3+\alpha_4=0;\end{array}$$

et enfin les *quatre points doubles :*

$$\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\\ \alpha_4=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_3=0,\\ \alpha_4=0,\\ \alpha_1=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_4=0,\\ \alpha_1=0,\\ \alpha_2=0.\end{cases}$$

On pourra construire une pareille surface, soit par points, soit par sections horizontales, en se donnant les valeurs particulières

$$\begin{array}{ll}30\alpha_1 = 5x+6y+11z-30, & 30\alpha_3 = -15x-6y+16z+30,\\ 30\alpha_2 = -5x-4y-9z+30, & 30\alpha_4 = 15x+4y+9z-30;\end{array}$$

(1) Car on voit aisément que l'équation est satisfaite par $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_3 = -\alpha_4$ et de même pour les deux autres couples.

les points nodaux ont alors pour coordonnées

$$(-6, -12, 12), \quad (0, -6, 6), \quad \left(\frac{6}{5}, \frac{42}{5}, -\frac{12}{5}\right), \quad (0, 21, -6).$$

On trouvera la représentation de ceux-ci dans BLYTHE, *On models of cubic surfaces* (1).

§ 21. — Surface générale du troisième degré.

Cette première surface une fois comprise, que le lecteur veuille bien se rappeler la figure formée par *l'hyperboloïde à une nappe et celui à deux nappes ayant le même cône asymptote*, et le procédé de déformation par lequel on conçoit habituellement le passage de celui-ci à l'un ou à l'autre des deux premiers : en *ouvrant et dilatant* le sommet du cône *autour* de l'axe, on voit naître l'hyperboloïde à une nappe; en le *tranchant* et en *contractant* la surface perpendiculairement à cet axe, on voit naître l'hyperboloïde à deux nappes. Si l'on déforme *de l'une ou de l'autre* manière *un ou plusieurs* des points coniques *a*, *b*, *c*, *d* de la figure 25, on a *différents types de surfaces du troisième degré;* nous allons appliquer *la première manière* aux *quatre points à la fois.*

Supposons donc que chacun d'entre eux *se dilate,* en sorte que le passage entre les régions de la surface qu'il unissait se fasse maintenant par *une portion de cette surface en forme de gorge ou tunnel.* Dans la projection que représente la figure 25, les traits pleins qui, de gauche à droite, aboutissent en pointe au point *a*, sont remplacés par une courbe en trait mixte qui va s'appliquer sur eux comme la *courbe de raccordement* des ingénieurs, et il en est de même aux points *b*, *c*, *d*.

Les quatre points coniques sont donc remplacés par *quatre gorges.* Entre elles, celles-ci en dessinent *six autres*, qui correspondent aux six arêtes du tétraèdre. Les trois en provenance des arêtes *ab*, *ac*, *ad* complètent leur pourtour, tout naturellement, sur la paroi que leur offre la nappe infinie en face de ces arêtes. Celles en provenance de *bc*, *cd*, *db* s'ouvrent béantes dans le

(1) *Quart. Journ. of p. and app. Math.*, Vol. XXXII, 1900-1901, p. 266-270.

haut de la figure et viennent se fermer dans le bas *en passant par l'infini.* Voici comment s'accomplit ce passage. Soit, en reprenant la figure 27, *mnp* l'intersection commune des plans I, II, III, IV par celui de l'infini : c'est sur les trois segments *mn*, *np*, *pm* de cette droite que se fait la réunion des jours supérieurs avec les jours inférieurs, comme c'est sur les trois arcs $mm'n$, $nn'p$, $pp'm$ que se fait la jonction de la surface qui est au-dessus du plan IV avec celle qui est au-dessous du plan I.

Telles sont les *dix ouvertures,* découvertes par Klein. Il ne faut pas trop attacher à ce mot *ouvertures* le sens ordinaire, qui en ferait comme des accidents localisés et indépendants, des *trous* en un mot. *Elles sont la surface même et la surface tout entière;* les deux faces de celle-ci en forment tour à tour les parois, et une portion de cette surface, prise suffisamment petite à un endroit quelconque, appartient toujours à *trois* ouvertures.

Nous désignerons les dix ouvertures par

$$(a),\ (b),\ (c),\ (d),\ (ab),\ (ac),\ (ad),\ (bc),\ (cd),\ (db).$$

Bien entendu, la déformation qui s'est accomplie autour des points a, b, c, d de la surface primitive n'y est pas localisée, mais a son effet sur tout l'ensemble, sans toutefois en changer beaucoup l'aspect général. A partir d'une certaine distance, ou si le tétraèdre est très petit, cet aspect est celui d'un cône à deux nappes présentant trois ondulations qui sont la continuation des trois échancrures (bc), (cd), (db) et qui aboutissent à la figure 27 dans le plan de l'infini.

La figure 27 montre cinq des ouvertures, mais il n'en faut considérer le dessin que comme un simple schéma, attendu que chaque ouverture est *une chose à deux dimensions,* en partie visible et en partie invisible, dont on ne pouvait songer à faire sur une pareille figure la projection exacte; plus loin nous en étudierons *la paroi.*

Voici d'autres conséquences du travail de dilatation que nous venons de décrire :

1° Les trois arêtes qui passaient par chaque sommet du tétraèdre *ont été séparées,* le nœud qui les serrait s'étant relâché. De plus, il faut observer que chaque arête est une *droite qua-*

druple de la surface de Klein, parce qu'elle est déterminée par deux points doubles et peut être considérée à volonté comme joignant l'un ou l'autre des deux *points simples* du premier à l'un ou à l'autre des deux *points simples* du second. Aussi *chacune des six arêtes s'est résolue en quatre autres* que nous retrouverons sous les dénominations suivantes :

1, 2′, 35, 46	provenant de	*ac*,	1′, 2, 36, 45	provenant de	*bd*,
3, 4′, 15, 26	»	*ad*,	3′, 4, 16, 25	»	*bc*,
5, 6′, 13, 24	»	*ab*,	5′, 6, 14, 23	»	*ab*,

et qui, avec les trois transversales, *portent à vingt-sept le nombre des droites de la surface.*

2° Tandis que les deux arêtes opposées *ac* et *bd* rencontraient le plan des transversales en *deux points* γ et γ', les huit droites qui en proviennent le rencontrent *en huit points qui sont sur la droite* $\gamma\gamma'$ et nous avons semblablement *huit traces* sur chacune des deux autres transversales $\delta\delta'$ et $\beta\beta'$. On verra plus loin la raison d'un pareil jalonnement, qui existe sur toutes les droites et que montrent les figures 28, 29, etc.

3° Les vingt-sept droites sont *toutes* obligées, pour aller se perdre en deux sens opposés dans l'infini de l'espace, de passer par l'étroite région qui s'est formée autour de l'ancien tétraèdre. Elles se faufilent d'une ouverture à l'autre en *se coupant* ou *s'évitant* d'une façon assez compliquée, que le *double-six de Schläfli* va nous permettre de débrouiller.

Il nous faut maintenant faire connaissance avec celui-ci, qui va être la base de notre exposition.

§ 22. — Le double-six de Schläfli.

On appelle ainsi (1), d'après le nom d'un mathématicien bernois qui l'imagina en 1863 pour faire l'énumération et la classification des surfaces du troisième degré, un *système de douze droites*

(1) En anglais : *double-six;* en allemand : *doppelsechs;* en italien : *bisestupla.*

de l'espace, opposées une à une dans deux groupes de six

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$1',\ 2',\ 3',\ 4',\ 5',\ 6',$$

de telle sorte que chaque droite n'en coupe aucune du même groupe et coupe toutes celles de l'autre groupe excepté son opposée. Le nombre des intersections est *trente,* et la condition peut être représentée par le schéma

	1	2	3	4	5	6
1′		*	*	*	*	*
2′	*		*	*	*	*
3′	*	*		*	*	*
4′	*	*	*		*	*
5′	*	*	*	*		*
6′	*	*	*	*	*	

ou, mieux encore, par la figure 28, où les croisements *pointés* correspondent seuls à des intersections, tandis que les autres ne sont que des suppositions accidentelles de projections.

Étant données une droite d'un des deux groupes de six, par exemple 4, et les cinq droites qu'elle doit couper : 1′, 2′, 3′, 5′, 6′, le double-six est déterminé, car on peut construire

une droite	1	qui rencontre	2′, 3′, 5′, 6′,
»	2	»	3′, 5′, 6′, 1′,
»	3	»	5′, 6′, 1′, 2′,
»	5	»	6′, 1′, 2′, 3′,
»	6	»	1′, 2′, 3′, 5′,

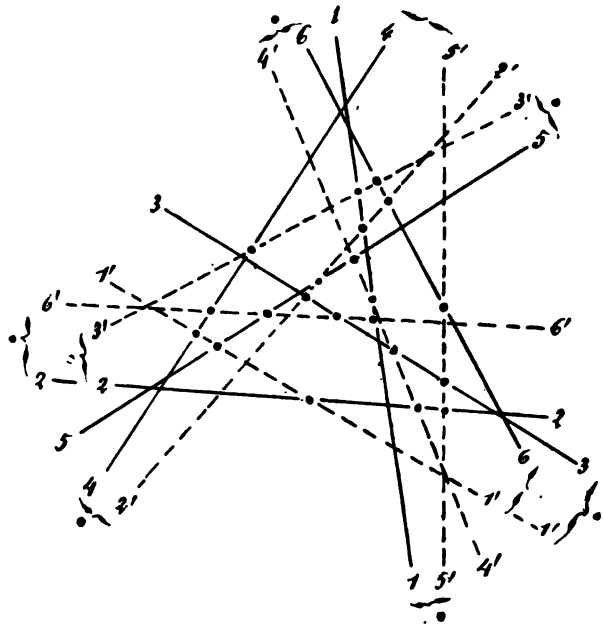
et alors les cinq droites 1, 2, 3, 5, 6 sont toutes rencontrées par une même droite 4′, qui complète le système (1).

Construisons maintenant une première droite, intersection du plan contenant les deux droites 1 et 2′ avec celui contenant les

(1) On trouvera la démonstration de ces propositions dans CAYLEY, *On the double-sixes of a cubic surface* [*Collected math. Papers* (*Quart. Journal,* t. X, 1870)] et dans KASNER, *The double-six configuration* (*American J. of Math.*, t. XXV, 1903, p. 107-122); la méthode suivie dans ces deux Mémoires est celle de la Géométrie analytique ordinaire.

deux droites 1′ et 2, et désignons-la par 12; continuons de même en faisant, par exemple, une droite 34 avec le plan des droites 3, 4′ et celui des droites 3′, 4, etc.

Fig. 28.



Le double-six de Schläfli.

Nous avons ainsi *quinze* droites

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \\ 1',\ 2',\ 3',\ 4',\ 5',\ 6', \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{rrrrr} 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\ & 23, & 24, & 25, & 26, \\ & & 34, & 35, & 36, \\ & & & 45, & 46, \\ & & & & 56, \end{array}\right.$$

que nous plaçons à côté des premières, et sur lesquelles nous appelons l'attention dès à présent parce qu'elles arriveront peu à peu à l'accaparer tout entière. Cela fait un ensemble de *vingt-sept droites, dont chacune rencontre dix des autres et en évite seize*, conformément à une règle très simple qui sera souvent

invoquée dans le cours de ce Chapitre sous le nom de LOI DES RENCONTRES, et que voici: *Pour que deux droites se rencontrent, il faut et il suffit :* 1° *lorsqu'elles sont représentées chacune par un seul chiffre, que les deux chiffres soient différents et qu'avec cela un d'eux soit accentué;* 2° *lorsqu'elles sont représentées, l'une par un seul chiffre et l'autre par deux, que l'un de ceux-ci soit le même que le premier, avec ou sans accent;* 3° *lorsqu'elles sont représentées l'une et l'autre par deux chiffres, qu'ils soient tous les quatre différents.* Par exemple, on voit de suite que les trois droites de chacun de ces groupes

$$1,\ 12,\ 2';\quad 2,\ 12,\ 1';\quad 12,\ 34,\ 56;\quad 12,\ 35,\ 46;\quad 12,\ 35,\ 46$$

sont dans un même plan, les cinq plans ayant en commun la droite 12.

Puisque chaque droite en évite seize, il y a $\frac{27.16}{2} = 216$ paires de droites ne se rencontrant pas. Comme une quelconque de ces paires peut être prise pour faire les deux droites opposées d'un double-six, le nombre de ceux-ci est

$$\frac{216}{6} = 36 \quad (^1).$$

C'est un groupe dont les *trente-six membres* se déduisent de l'un quelconque d'entre eux par des opérations identiques. Le premier étant celui donné page 82, voici le Tableau des autres :

---

(1) On peut aussi arriver à ce nombre 36 en calculant de proche en proche le nombre n_2 des *double-deux*, n_3 des *double-trois*, n_4 des *double-quatre*, etc., ces expressions ayant une définition analogue à celle du double-six :

$$n_2 = 27.10.2 = 540, \qquad n_3 = \frac{4}{3} n_2, \qquad n_4 = \frac{3}{4} n_3, \qquad n_5 = \frac{2}{5} n_4, \qquad n_6 = \frac{1}{6} n_5 = 36.$$

L'examen des numérateurs des coefficients montre la suite *épuisée* et il n'existe pas en effet de *double-sept* ou au-dessus.

TABLEAU I. — LES TRENTE-CINQ DOUBLE-SIX DÉRIVÉS DU DOUBLE-SIX $\left\{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'.\end{matrix}\right.$

1 2 3 56 64 45	1 2 4 56 63 35	1 2 5 46 63 34	1 2 6 45 53 34	1 3 4 56 62 25
23 31 12 4′ 5′ 6′	24 41 12 3′ 5′ 6′	25 51 12 3′ 4′ 6′	26 61 12 3′ 4′ 5′	34 41 13 2′ 5′ 6′
1 3 5 46 62 24	1 3 6 45 52 24	1 4 5 36 62 23	1 4 6 35 52 23	1 5 6 34 42 23
35 51 13 2′ 4′ 6′	36 61 13 2′ 4′ 5′	45 51 14 2′ 3′ 6′	46 61 14 2′ 3′ 5′	56 61 15 2′ 3′ 4′
2 3 4 56 61 15	2 3 5 46 61 14	2 3 6 45 51 14	2 5 5 36 61 13	2 4 6 35 51 13
34 42 23 1′ 5′ 6′	35 52 23 1′ 4′ 6′	36 62 23 1′ 4′ 5′	45 52 24 1′ 3′ 6′	46 62 24 1′ 3′ 5′
2 5 6 34 41 13	3 4 5 16 62 21	3 4 6 25 51 12	3 5 6 24 41 12	4 5 6 23 31 12
56 62 25 1′ 3′ 4′	45 53 34 2′ 1′ 6′	46 63 34 1′ 2′ 5′	56 63 35 1′ 2′ 4′	56 64 45 1′ 2′ 3′
1 1′ 23 24 25 26	1 1′ 32 34 35 36	1 1′ 42 43 45 46	1 1′ 52 53 54 56	1 1′ 62 63 64 65
2 2′ 13 14 15 16	3 3′ 12 14 15 16	4 4′ 12 13 15 16	5 5′ 12 13 14 16	6 6′ 12 13 14 15
2 2′ 31 34 35 36	2 2′ 41 43 45 46	2 2′ 51 53 54 56	2 2′ 61 63 64 65	3 3′ 41 42 45 46
3 3′ 21 24 25 26	4 4′ 21 23 25 26	5 5′ 21 23 24 26	6 6′ 21 23 24 25	4 4′ 31 32 35 36
3 3′ 51 52 54 56	3 3′ 61 62 64 65	4 4′ 51 52 53 56	4 4′ 61 62 63 65	5 5′ 61 62 63 64
5 5′ 31 32 34 36	6 6′ 31 32 34 35	5 5′ 41 42 43 46	6 6′ 41 42 43 45	6 6′ 51 52 53 54

Deux double-six peuvent avoir *quatre* ou *six* droites communes; on dit dans le second cas qu'ils sont *associés*. Chaque double-six est associé avec vingt des autres, qui sont eux-mêmes associés deux à deux. Nous rencontrerons plus loin *dix couples de trièdres conjugués* qui correspondent à ces *dix couples de double-six associés*.

On voit que les *trente-cinq double-six dérivés* se divisent en deux catégories, l'une de vingt, l'autre de quinze, différenciées par la forme de la notation. Nous n'aurons affaire qu'à ceux de la première, et nous abrégerons leur notation en n'en écrivant que les trois premiers chiffres, comme ceci (1) :

123,	124,	125,	126,							
	134,	135,	136,	234,	235,	236,				
		145,	146,		245,	246,	345,	346,		
			156;			256,		356;	456.	

L'ordre des chiffres de chaque triade est indifférent en soi, mais il conviendra de les mettre dans l'ordre de grandeur, pour passer de la notation abrégée à celle du Tableau.

§ 23. — La projection de Zeuthen.

1. Si, d'un point quelconque O de l'espace, on mène des droites à tous les points de la surface du troisième degré, leurs traces sur un plan fixe, que nous appellerons le *plan de projection*, forment une aire dont le *contour* est, en général, une courbe de sixième degré ayant six points de rebroussement situés sur une section conique.

Si l'on prend le point O sur la surface elle-même, et en un point où la courbure est elliptique, par exemple le point *m* de la figure 25; si en outre on prend le plan de projection parallèle au plan tangent en O; alors *le contour de la projection est une courbe du quatrième degré formée de quatre ovales sans point singulier*.

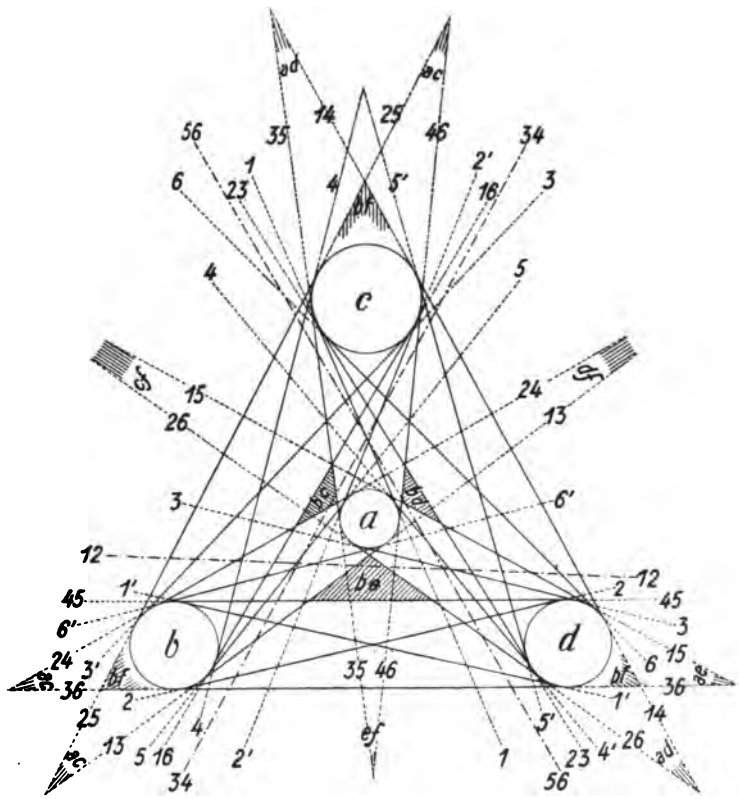
---

(1) Comparez ce Tableau à celui des *points de Steiner*, page 63; à celui des *plans de l'hexastigme*, page 125, etc.

Ce sont ces quatre ovales que représente la figure 29, où on les a remplacés par des cercles, leur forme exacte étant de peu d'importance; ils y sont désignés par les notations (a), (b), (c), (d) dont on verra bientôt la correspondance avec celle du paragraphe précédent.

La figure 29, due à Zeuthen, le grand mathématicien du Dane-

Fig. 29.



Projection stéréographique de Zeuthen.

mark, doit être considérée comme la réunion de deux feuilles appliquées sur le plan fixe qu'est le plan de projection; l'une tournée vers le point O et appelée la *feuille visible*, l'autre tournée du côté opposé et appelée la *feuille invisible*. Si l'on fait partir du

point O, du même côté du plan tangent que les points de la surface qui en sont voisins, un mobile marchant en ligne droite jusqu'à l'infini, puis *continuant dans le même sens* et revenant à son point de départ par l'autre segment de la même droite, c'est la première qu'il rencontrera *d'abord* à l'aller, et c'est la seconde qu'il rencontrera d'abord au retour. Les parties dessinées en plein appartiennent à la première et celles dessinées en pointillé à la seconde. Les deux feuilles se continuent mutuellement au passage par l'infini, qui n'est pas un contour de la projection, ce contour étant constitué uniquement par les quatre ovales. Les courbes qui passent par le point O sont les seules dont les projections s'étendent *à l'infini* sur la feuille visible. Ce point O est le seul de la surface auquel correspondent tous les points d'une droite de la projection, laquelle est la droite de l'infini du plan de projection.

Toute droite menée par le point O rencontre la surface en deux autres points P et Q, et traverse le plan de projection en un point *m* qui est la projection commune de P et Q. Quand P et Q coïncident, le point *m* est sur le contour de la projection. Si la droite projetante suit une droite de la surface, sa trace suit une tangente double du contour, on verra plus loin pourquoi; cette trace passe de la feuille visible à la feuille invisible, ou réciproquement, quand elle arrive à un point de tangence; *et c'est toujours le segment de la tangente double compris entre les deux cercles qui est sur la feuille visible,* parce que les lignes passant à l'infini sur cette feuille représentent des lignes de la surface qui passent par le centre de projection. Deux droites de la surface se rencontrent si le point en lequel leurs projections se croisent, considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre, se trouve sur la même feuille, c'est-à-dire *si, en cet endroit, les projections sont toutes les deux en trait plein ou toutes les deux en trait pointillé.* Cette règle est tellement simple que nous délaissons pour cette fois les *gros points* qui nous servent d'habitude à distinguer des centres les croisements répondant à de vraies intersections.

2. On peut, de six manières, associer les quatre ovales deux à deux et leur mener chaque fois quatre tangentes communes; cela en fait *vingt-quatre,* et ce sont les projections d'autant de droites

de la surface. Voici pour les trois autres. On sait (1) que la *courbe du quatrième degré à quatre ovales* possède *vingt-huit* tangentes doubles, dont vingt-quatre, dites *de la seconde espèce,* ont leurs contacts réels et sur deux ovales différents, tandis que les quatre autres, dites *de la première espèce,* ont leurs contacts, réels ou imaginaires, sur un même ovale; quand ils sont réels, cet ovale a, entre les deux points de contact, un arc s'éloignant de la tangente double et y revenant par deux points d'inflexion. Les quatre dernières représentent dans notre cas : 1° la droite de l'infini du plan, qui est une tangente double à contacts imaginaires et arrive ici comme l'intersection du plan tangent en O avec le plan de projection; 2° les trois projections qui nous manquaient : elles sont supposées à contacts imaginaires, et représentées dans la figure 29 par les trois lignes en traits mixtes 12, 34, 56; elles sont entièrement sur la feuille invisible. Les trois droites de la surface ainsi projetées ne sont autres que celles qui ont reçu le nom de *transversales* dans le paragraphe 20.

Les quatre ovales se trouvent : un dans le triangle formé par ces trois lignes, et les autres dans les trois angles extérieurs de ce triangle; de cette façon une droite ne saurait les couper en plus de quatre points.

Les projections des vingt-sept droites de la surface sont donc, dans la figure 29 : 1° les trois tangentes doubles à contacts imaginaires, dessinées en trait mixte; 2° douze tangentes doubles externes, c'est-à-dire allant se croiser au delà du plus petit des deux cercles; 3° douze tangentes doubles internes, se croisant entre les deux cercles. Nous désignerons les droites auxquelles répond ce dernier lot par les numéros

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$1',\ 2',\ 3',\ 4',\ 5',\ 6',$$

répartis, comme le montre la figure, de telle sorte que les tangentes internes communes au cercle du milieu et aux trois autres portent les numéros

$$1 \text{ et } 2',\quad 3 \text{ et } 4',\quad 5 \text{ et } 6',$$

(1) *Voir* SALMON, *Géométrie analytique.*

et celles communes aux cercles extérieurs les numéros

$$1' \text{ et } 2, \quad 3' \text{ et } 4, \quad 5' \text{ et } 6.$$

Les douze droites de la surface ainsi projetées se trouvent deux à deux dans six plans qui passent par les trois transversales 12, 34, 56, et *forment un double-six.*

Dès lors, *le système formé par les vingt-sept droites de la surface du troisième degré s'identifie avec celui décrit dans le paragraphe précédent et tout ce que nous avons dit de celui-ci s'applique à celui-là;* en particulier, nous retrouvons sur la surface les *trente-six double-six* du Tableau de la page 85.

§ 24. — Plans bitangents et tritangents.

Tout plan passant par une des vingt-sept droites, par exemple la droite 12, a pour intersection avec la surface *cette droite elle-même plus une conique,* puisque la section complète doit être une ligne du troisième degré. Un quelconque de ces plans est tangent à la surface en deux points de la droite 12, réels ou imaginaires, qui sont *les intersections de la droite*, et les ∞^1 couples de points qui sont ainsi marqués sur celle-ci forment une involution. Les points doubles de l'involution sont imaginaires sur les droites du double-six fondamental, qui sont désignées par un seul chiffre et ont pour projection des tangentes doubles internes; ils sont réels sur les quinze autres, en sorte qu'il y a *trente* points doubles réels.

Parmi les ∞^1 plans qui passent par la droite 12, et qui sont tous bitangents à la surface, il y en a *cinq* qui la touchent encore une fois *en dehors* de cette droite. Nous savons en effet qu'elle est coupée par dix de ses congénères; ce sont, de par la loi des rencontres (page 84) : 1° les quatre *droites à un chiffre* formées avec les chiffres 1 et 2 :

$$1, \quad 1', \quad 2, \quad 2',$$

2° les six *droites à deux chiffres* formées avec les chiffres 3, 4, 5, 6 :

$$34, \quad 35, \quad 36, \quad 45, \quad 46, \quad 56.$$

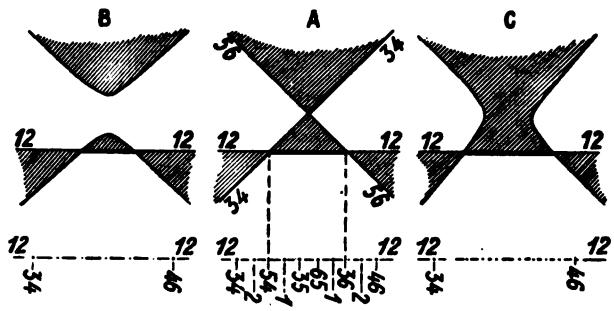
Mais ces dix droites se coupent entre elles, en vertu de cette même loi, suivant chacun des cinq couples

1 et 1′, 2 et 1′, 34 et 56, 45 et 63, 53 et 64,

et ces couples forment avec la droite 12 cinq plans dont chacun est tangent à la surface aux croisements des trois droites qui la déterminent : *c'est un plan tritangent.*

La figure 3o donne, en A, la forme de l'intersection de la surface

Fig. 3o.



Plans bitangents et tritangents.

par le plan tritangent 12 34 56 et l'on y a marqué les numéros des droites coupant 12. Les hachures correspondent aux parties convexes qui sont au-dessus du plan, et les blancs aux parties concaves qui sont au-dessous ; l'on peut d'ailleurs avoir aussi une figure A′ qui serait le *moule* de A, remplaçant les reliefs par des creux et réciproquement. Si le plan tourne légèrement autour de 12, dans un sens ou dans l'autre, la section *se déplace et se déforme*, devenant une *hyperbole* B ou C; le plan n'est plus que bitangent. La rotation continuant, si nous sommes entraînés par elle, nous verrons ce qui suit. La conique court sur la droite en y marquant par ses intersections une infinité de couples de points en involution ; une des branches de l'hyperbole s'éloigne de plus en plus de l'autre qui finit par devenir une *parabole;* mais ce n'est qu'une transition qui amène l'*ellipse;* ellipse d'abord très allongée, se raccourcissant, s'arrondissant, s'allongeant dans le sens perpendiculaire pour donner une *autre parabole.* Et ces alternatives se

reproduisent *quatre fois* pour revenir finalement au triangle A précédé de la forme C ou de la forme B (1).

On s'explique maintenant les *tangentes doubles* de la projection de Zeuthen : le plan qui projette une des vingt-sept droites est un plan bitangent, et sa trace sur le plan de projection doit être doublement tangente au contour de la projection.

On s'explique aussi les *vingt-sept* droites de la surface. Nous avons vu qu'il passe par chaque droite *cinq* plans tritangents. Prenons-en un, P. Par chacune de ses trois droites a_1, a_2, a_3 on en peut donc mener quatre autres, ce qui fait douze. Chacun de ces nouveaux plans ajoute deux droites, ce qui fait

$$3 + 2 \times 12 = 27.$$

Et c'est tout. Car soit d une droite quelconque de la surface. Le plan P ne peut pas avoir de point commun avec celui-ci en dehors de a_1, a_2, a_3, qui constituent son intersection entière; la droite d ne peut donc le couper qu'en un point de a_1, a_2 ou a_3; supposons que c'est a_1; le plan contenant d et a_1 ne peut couper la surface que suivant une troisième droite, puisque cette intersection doit être une ligne du troisième degré; c'est donc un plan tritangent, et c'est un des *quatre* qui, en plus de P, passent par a_1, de même que d est une des *huit droites* qui, en plus de a_2 et a_3, rencontrent a_1.

Il suit immédiatement de là que le nombre des plans tritangents est

$$\frac{27 \times 5}{3} = 45.$$

On les désignera en écrivant les trois droties qu'ils contiennent, et cette notation les divise en deux groupes, l'un de *trente,* l'autre de *quinze :*

Premier groupe. — Le premier groupe comprend les plans tritangents ayant deux droites du double-six générateur et une droite dérivée (c'est-à-dire deux droites à *un chiffre* et une à

(1) Les *quatre paraboles* ont été découvertes par M. Picquet : *Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. IV, 1875-1876, p. 153).

deux chiffres); tels sont, par exemple, les deux plans

$$1\ 12\ 2', \quad \text{et} \quad 1'\ 12\ 2$$

qui se coupent suivant la droite 12 (1). Le terme du milieu pourrait suffire pour désigner les deux formes en convenant d'y accentuer l'un ou l'autre des deux chiffres, c'est-à-dire d'écrire $12'$ pour la première et $1'2$ pour la seconde; alors les plans tritangents dont il s'agit se réunissent en un Tableau carré :

*	$12'$	$13'$	$14'$	$15'$	$16'$
$21'$	*	$23'$	$24'$	$25'$	$26'$
$31'$	$32'$	*	$34'$	$35'$	$36'$
$41'$	$42'$	$43'$	*	$45'$	$46'$
$51'$	$52'$	$53'$	$54'$	*	$56'$
$61'$	$62'$	$63'$	$64'$	$65'$	*

où l'on voit clairement que leur nombre est bien *trente*.

Deuxième groupe. — Les quinze plans restants ne contiennent que des droites à deux chiffres, qui sont celles du Tableau page 83. Comme nous aurons souvent affaire à eux désormais, nous les désignerons par les quinze symboles abréviatifs *ab*, *ac*, ... comme le montre le Tableau suivant, imité de celui du paragraphe 12, page 46.

TABLEAU II.

(I).			(II).					
$ab = 12$	34	56,	$bc = 16$	24	35,	$ce = 14$	23	56,
$ac = 13$	25	46,	$bd = 15$	23	46,	$cf = 15$	26	34,
$ad = 14$	26	35,	$be = 13$	26	45,	$de = 16$	25	34,
$ae = 15$	24	36,	$bf = 14$	25	36,	$df = 13$	24	56,
$af = 16$	23	45,	$cd = 12$	36	45,	$ef = 12$	35	46.

Ils sont divisés eux-mêmes en deux sous-groupes I et II, l'un de cinq, l'autre de dix, lesquels auront chacun leur rôle.

Si l'on *résout* ces égalités par rapport aux binomes de chiffres, on en a quinze autres toutes parallèles aux formules (4) de la

(1) Pour avoir les plans tritangents qui passent par la droite 12, il n'y a qu'à ajouter 12 dans chacun des cinq couples de la page 91.

page 46. Ce second groupe montre on ne peut mieux qu'*il passe trois des quinze plans par chacune des quinze droites,* tandis qu'il ressort du premier que *chacun des quinze plans contient trois des quinze droites.*

§ 25. — Construction des vingt-sept droites.

1. On peut *mettre et voir les vingt-sept droites en position* en faisant la construction qu'indique la figure 31; c'est une épure de Géométrie descriptive ordinaire, à ceci près : 1° en vue de faciliter la *séparation* dont il sera question plus bas, nous avons écarté un peu *les deux bords* LT et L'T' de la ligne de terre; 2° afin que notre construction ait toute la généralité qu'on peut demander, nous supposons *quelconque* l'angle des deux plans de projection, que nous appellerons *ab* et *ac*, au lieu des déterminations habituelles H et V; dès lors il ne peut plus être question de projections, mais seulement d'*intersections :* les droites non situées dans les plans *ab* ou *ac* seront définies et représentées simplement par *leurs traces* sur les plans. Un même groupe de deux chiffres, tel que 12, servira donc pour désigner trois choses, *une droite de l'espace, sa trace sur le plan ab et celle sur le plan ac.* Les deux espèces de traces ne pourront pas être confondues parce que le dessin est disposé de manière que les premières soient toutes *au-dessous* de la ligne de terre, et les secondes toutes *au-dessus;* les deux chiffres seront *soulignés* lorsqu'il s'agira de la droite elle-même et qu'une confusion sera possible.

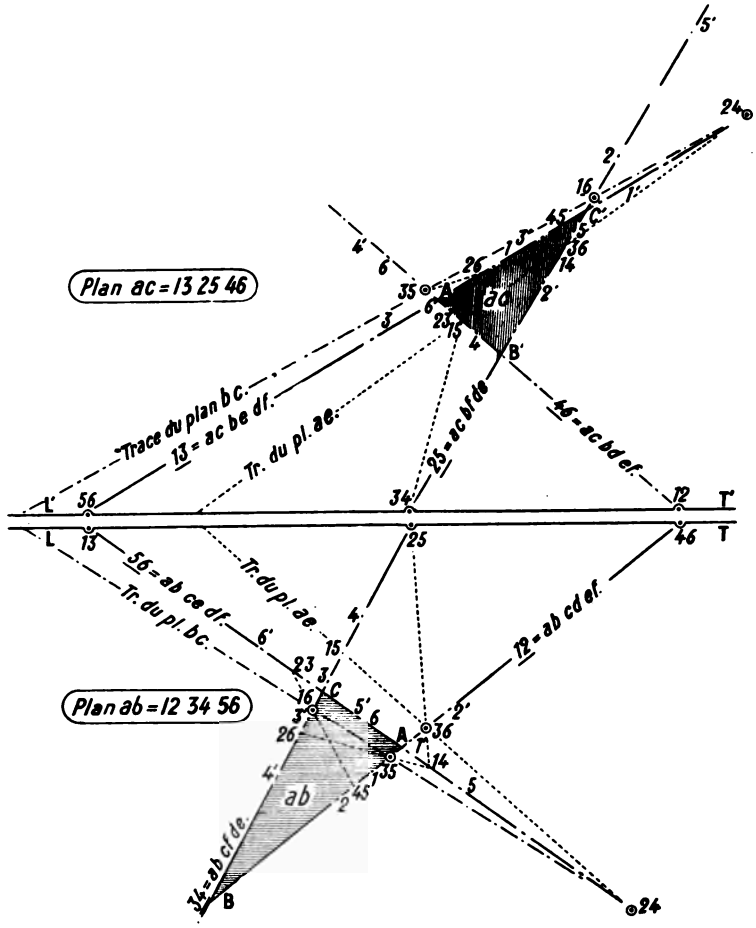
Pour construire les vingt-sept droites, nous devons prendre comme point de départ un ensemble de données équivalent à *dix-neuf conditions,* parce que tel est le nombre de paramètres que contient l'équation générale du troisième degré entre trois variables. Ces données, que voici, consistent en *neuf droites et un point devant appartenir à la surface,* ce qui fait bien ($2 \times 9 + 1$) conditions :

1° Traçons dans le plan *ab* trois droites quelconques que nous appellerons 12, 34, 56 ou indifféremment AB, BC, CA (A, B, C étant les sommets du triangle formé par elles); marquons sur la *demi-ligne de terre supérieure* L'T' leurs traces verticales 12, 34, 56.

2° Traçons dans le plan *ac* trois autres droites 13, 25, 46 ou A'C',

C′B′, B′A′, que nous prenons, la première, parmi celles en nombre infini qui rencontrent la ligne de terre en 56, la deuxième parmi celles qui la rencontrent en 34, la troisième parmi celles qui la

Fig. 31.



Construction des vingt-sept droites.

rencontrent en 12; ces intersections, considérées comme étant leurs traces sur *ab*, sont marquées 13, 25, 46 sur la *demi-ligne de terre inférieure* LT.

3° Marquons dans le plan *ab* sur BA et BC, puis dans le plan *ac* sur

B'A' et B'C', deux points 16 et 35 tels que les deux lignes 16 35 se rencontrent sur la ligne de terre et, par suite, soient les traces d'un certain plan que nous appellerons *ac*; appelons 24 les intersections des traces de ce plan avec CA d'une part et C'A' de l'autre; les trois droites **16**, **24**, **35** situées dans le plan *ac* formeront le troisième groupe de données;

4° Enfin, marquons sur BA un point 36, qui sera la dernière donnée et notre dix-neuvième condition; si nous menons par ce point une droite qui rencontre **12**, **42** et **52**, celle-ci appartient à la surface puisqu'elle a trois points, et nous la désignerons par **36**.

2. En résumé, nous partons de *neuf droites et un point.* Les droites forment trois triangles dans autant de plans distincts *ab*, *ac*, *bc* et nous avons posé *a priori,* en toute liberté, les conditions suivantes :

12, **34**, **56**, à volonté dans un premier plan *ab*;
46, **25**, **13**, dans un deuxième plan *ac* et devant coupler respectivement **12**, **34**, **56**;
35, **16**, **24**, dans un troisième plan *bc* et devant coupler respectivement **12** et **46**, **34** et **25**, **56** et **13**; le point **36** sur **12**.

Dans la figure, les trois premières droites sont *en position* sur le plan *ab* du dessin, et les trois suivantes sur le plan *ac* rabattu; des trois dernières, on n'a pu représenter que les traces sur ces deux plans, à raison de l'indétermination laissée à leur angle.

Quant aux inconnues, ce sont la seconde trace de **36** et les deux traces de *dix-sept droites*, qui seront désignées par

14, 15, 23, 26, 45, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1', 2', 3', 4', 5', 6'.

Ces trente-cinq points s'obtiennent en construisant de proche en proche, sur chaque plan *ab* ou *ac*, les traces des trente-deux plans tritangents qui passent par un côté d'un des triangles ABC, A'B'C'. C'est *principalement* la loi des rencontres qui sert de guide. Ainsi, puisque les droites **14**, **25**, **36** sont dans un même plan, on peut construire les deux traces de ce plan au moyen des points 24, 36 connus sur *ab* et 24 connus sur *ac*; elles donnent le point 36 sur *ac* parce qu'il doit être sur **25**; elles donnent encore 15 sur *ab* parce qu'il est sur **24**, et 15 sur *ac* parce qu'il est sur **46**. La figure

montre comment ensuite :

$$\left.\begin{array}{llll} 46 \text{ et } 15 & \text{donnent } 23 & \text{sur } ab \\ 23 \text{ et } 16 & \text{» } 45 & \text{» } \\ 25 \text{ et } 36 & \text{» } 14 & \text{» } \\ 14 \text{ et } 35 & \text{» } 26 & \text{» } \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{llll} 12 \text{ et } 36 & \text{donnent } 45 & \text{sur } ac \\ 45 \text{ et } 16 & \text{» } 23 & \text{» } \\ 34 \text{ et } 15 & \text{» } 26 & \text{» } \\ 26 \text{ et } 35 & \text{» } 14 & \text{» } \end{array}\right\}.$$

Il se présente à ce moment une sorte d'hiatus, la méthode faisant défaut pour le passage des droites à deux chiffres aux droites à un chiffre; on peut la suppléer de diverses façons et continuer ensuite à l'appliquer.

Avant de quitter le sujet signalons la solution très complète donnée par M. d'Ocagne à propos d'un problème du Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1895 (1) et basée, comme notre exposition, sur les propriétés du double-six.

3. Maintenant, que le lecteur veuille bien : — agrandir convenablement la figure 31, par exemple trois fois, — en séparer les deux parties et les coller sur deux planchettes distinctes, — percer celles-ci aux trente-six points marqués, — les réunir par des charnières en ayant soin que leurs lignes LT et L'T' soient exactement sur l'axe de ces charnières, et que les points 12, 34, 56 de l'une coïncident avec les points 46, 25, 13 de l'autre, — les assujettir en équerre ou sous telle autre inclinaison qui lui conviendra, — enfin réunir par des fils les trois de même numéro et couvrir aussi par des fils les six droites qui sont couchées sur les planchettes. *Il aura les vingt-sept droites d'une surface du troisième degré* (2).

Cette surface diffère peu de la *surface de Klein* représentée par les équations particulières de la page 26. Les lignes 12, 34, 56 en sont *les transversales,* et les *arêtes du tétraèdre* sont fournies

(1) Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'École Polytechnique (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. XIV, 1895, p. 339).

(2) Ce n'est pas sans tâtonnements qu'on peut trouver une figure où les points soient placés comme il faut; celle dont nous faisons usage pourra être reconnue dans *Cambridge Philosophical Transactions,* vol. XVIII, 1900, p. 375 (H. Mr. Taylor, *On the construction of a model showing the* 27 *lines on a cubic surface*).

par la fusion des vingt-quatre autres quatre à quatre comme ceci :

$$\left\{\begin{matrix}1,\\2',\\35,\\46;\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}1',\\2,\\36,\\45;\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}3,\\4',\\15,\\26;\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}3',\\4,\\16,\\25;\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}5,\\6',\\13,\\24;\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}5',\\6,\\14,\\23.\end{matrix}\right.$$

§ 26. — Les compartiments et les ouvertures.

Les droites divisent la surface en *compartiments,* qui sont de trois sortes et au nombre total de cent trente.

Il y a *trente pentagones,* dont

$$1'\ 2\ 53\ 36\ 14$$

est un exemple ; *quatre-vingt-dix tétragones,* tels que

$$36\ 14\ 1'\ 6' \quad \text{et} \quad 36\ 6\ 1'\ 15;$$

et enfin *dix triangles,* qui méritent un mot de plus. Le dédoublement des arêtes

$$ab,\ cd;\quad ac,\ db;\quad ad,\ bc$$

du tétraèdre primitif (*voir* p. 8) engendre *six* de ces triangles en même temps qu'il engendre les droites

$$35,\ 46;\quad 36,\ 45;\quad 15,\ 26;\quad 16,\ 25;\quad 13,\ 24;\quad 14,\ 23;$$

deux, 13 24 56 et 14 23 56, sont formés par les deux premiers couples avec la transversale $\beta\beta' = 56$; *deux,* 35 46 12 et 36 45 12, le sont par les deux suivants avec la transversale $\gamma\gamma' = 12$; *deux,* 15 26 34 et 16 25 34, par les deux derniers avec $\delta\delta' = 34$. En outre, parmi les droites provenant de trois arêtes d'une même face du tétraèdre, il s'en trouve encore trois qui sont dans un même plan et donnent quatre triangles de plus :

$$13\ 26\ 45,\quad 24\ 35\ 15,\quad 46\ 15\ 23,\quad 23\ 45\ 16.$$

Ces dix triangles sont ceux intitulés II dans le Tableau de la page 93 ; tous les autres *périmètres triangulaires,* au nombre de trente-cinq, que les vingt-sept droites forment par leurs croisements dans l'espace, déterminent bien des plans tritangents, mais

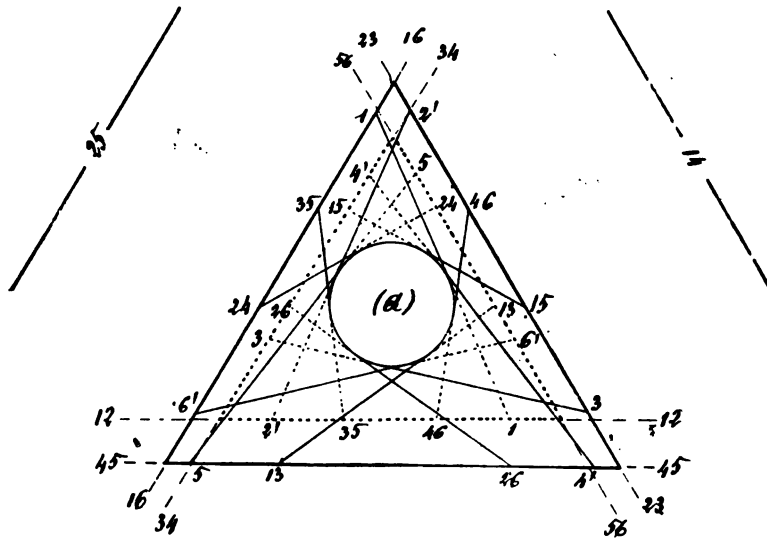
circonscrivent une région de la surface formée de plusieurs compartiments et non d'un seul triangle.

Nous dirons qu'*une ouverture et un triangle sont opposés l'un à l'autre* lorsque celle-là provient de la dilatation d'un sommet et celui-ci des arêtes de la face opposée à ce sommet, ou lorsqu'ils proviennent d'arêtes opposées.

Les dix ouvertures.

Le centre de projection avec lequel est faite la figure 29 se trouve au milieu du triangle 14 25 36 qui provient de la face su-

Fig. 32.



36

Paroi d'une ouverture.

périeure *bcd* du tétraèdre; le pourtour de ce triangle se projette sur les trois tangentes doubles tout à fait extérieures et n'a pas de pendant dans l'ensemble des quarante-cinq plans tritangents. On

voit sur la figure que les quatre ovales

$$(a),\quad (b),\quad (c),\quad (d)$$

qui forment le contour de la projection sont entourés respectivement par les projections des droites d'un double-six

$$135,\quad 146,\quad 236,\quad 246.$$

Considérons le premier dont le double-six 135 est formé des douze droites provenant de *ab*, *ac*, *ad*. Visibles d'un côté du point de tangence, ces droites ne le sont plus de l'autre et, par suite, *ont traversé l'ouverture*. Or celle-ci est comprise entre deux triangles, l'un *visible* 16 54 35, l'autre *invisible* 12 34 56, dont les périmètres comprennent entre eux, allant de l'un à l'autre, *des segments de toutes les droites du double-six* 136, *à l'exclusion d'aucune autre droite*. Avec Zeuthen, nous appellerons *paroi de l'ouverture* (*a*) la partie de la surface ainsi nettement délimitée, et nous dirons que les deux triangles *ferment l'ouverture*. Appuyés sur leurs côtés, les douze segments partagent la paroi en triangles, tétragones et pentagones, et semblent en être la charpente.

La figure 32 montre ce qu'on vient de dire, et le Tableau III donne, à ce point de vue, la composition des ouvertures.

TABLEAU III. — LES DIX OUVERTURES.

OUVERTURE.	DOUBLE-SIX GÉNÉRATEUR.	TRIANGLES LIMITANT LA PAROI.	TRIANGLE opposé A L'OUVERTURE.
(*a*)	135	*ab* et *af*	*bf*
(*bd*)	256	*af* » *ae*	*fe*
(*da*)	123	*ae* » *ad*	*ed*
(*ac*)	156	*ad* » *ac*	*dc*
(*d*)	236	*ac* » *ab*	*cb*
(*c*)	146	*ab* » *ae*	*be*
(*ab*)	345	*ae* » *ac*	*ec*
(*bc*)	124	*ac* » *af*	*cf*
(*cd*)	346	*af* » *ad*	*fd*
(*b*)	245	*ad* » *ab*	*db*

Si l'on compare aux autres une des dix ouvertures, par exemple

(a), on voit deux sortes de relations : 1° il y a *trois* ouvertures

$$(ab),\quad (ac),\quad (ad)$$

dont les double-six générateurs sont *associés* avec celui de (a), c'est-à-dire ont avec lui *six droites communes* (*voir* § 20); bien plus, c'est *tout une portion de paroi qui est commune aux deux ouvertures,* et elle en est la séparation, ses deux faces étant paroi interne dans l'une et paroi externe dans l'autre; 2° il y en a *six*

$$(b),\quad (c),\quad (d),\quad (bc),\quad (cd),\quad (db)$$

dont les double-six générateurs ont avec celui de (a) *quatre droites communes;* chacune d'elles a *un triangle de fermeture commun avec* (a); dans le voisinage de ce triangle, les deux ouvertures se trouvent de part et d'autre de son plan et de la surface; elles aussi ont une portion de paroi commune et, en cet endroit, elles sont du même côté de la paroi.

On dit qu'une ouverture est *visible d'un point de la surface* quand on peut mener par celui-ci des droites ne rencontrant la surface qu'en un point et entourées par la paroi de l'ouverture, ou une partie au moins de cette paroi. Si, dans la figure 32, on déplace le centre de projection vers la ligne 25, une nouvelle ouverture devient visible de ce côté, et (d) finit par s'éclipser du côté opposé, comme si l'on déroulait une toile. En le mettant successivement dans chacun des triangles, on voit tour à tour différents groupes d'ouvertures. Si on le met dans un tétragone ou dans un pentagone, deux des ovales deviennent paraboliques. S'il s'arrête sur une droite, le contour de la projection est formé par la droite de l'infini du plan de projection et une courbe du troisième degré.

§ 27. — Particularisations.

Nous ne pouvons pas songer à aborder la question de la *classification* des surfaces du troisième degré, résolue complètement par Schläfli et par Cayley (1), et assez compliquée, car il ne se

(1) SCHLÄFLI, *On the distribution of surfaces of the third order into species in reference to the absence of singular points and the reality of their lines* (*Philosophical Transactions,* vol. CLIII, 1863, p. 193-241). — CAYLEY, *A Memoir on cubic*

présente pas moins de *vingt-deux* types. Nous voulons seulement *indiquer* les modes principaux de particularisation; un d'eux va nous être nécessaire.

A. *La surface diagonale.* — Si l'on poursuit le mouvement de dilatation décrit paragraphe 20, jusqu'à ce que les deux courbes concaves qu'il y a dans le haut de la figure 26 se rejoignent en une seule courbe $b'md'$, et de même pour toutes les autres, on a la figure appelée par Clebsch *surface diagonale.* On peut donc dire que la surface que nous avons étudiée sous le nom de *surface générale* est comprise entre deux *cas limites* dont l'un est la *surface de Klein* et l'autre la *surface diagonale.* Dans celle-ci, les dix triangles A sont réduits à autant de points, espèces d'*ombilics* où la surface *n'a pas de courbure;* partout ailleurs elle est à courbure hyperbolique. Elle a toujours vingt-sept droites et dix ouvertures. Elle a été étudiée par M. Bioche dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. XIV, 1897.

B. *Un point conique.* — Supposons que la paroi d'une ouverture *se resserre* de plus en plus, et qu'à la limite une de ses sections se réduise à un point O. Ce sera un *point conique,* comme nous savons. Alors toutes les droites du double-six qu'il y avait sur la paroi en question passent par ce point, et il faut pour cela que *chacune de ses droites vienne coïncider avec son opposée,* autrement il y aurait quatre droites de la surface sur une même section plane. En appelant ce double-six

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$1',\ 2',\ 3',\ 4',\ 5',\ 6',$$

les couples de droites 1 et 1', 2 et 2', ... se réduisent à *six rayons* 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui sont les intersections de la surface par le cône tangent en O; deux plans $12'$ et $1'2$ n'en font plus qu'un et le binome 12 désigne la droite de la surface située dans le plan des rayons 1 et 2.

Il reste donc toujours quinze droites dont la notation est composée de deux chiffres, comme dans le Tableau de la page 83,

---

surfaces (*Id.*, vol. CLIX, 1869, p. 231-326). — RODENBORG, *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung* (*Math. Annalen,* t. XIV, 1879).

elles sont trois par trois dans quinze autres plans Δ, qui sont les plans tritangents de la surface et dont aucun n'a son point de contact en O.

Au fond, nous avons toujours le même total de 27 droites, car il y en a six comptant pour deux et quinze simples, et le même total de 45 plans tritangents, car il y en a quinze comptant pour deux (ce sont ceux qui passent par O) et quinze simples.

C. *Plusieurs points coniques.* — Il peut se former de même *deux, trois* ou *quatre* points coniques, *mais pas davantage.* Le dernier cas est celui de la surface de Klein, décrite paragraphe **20.** Nous y voyons maintenant, en plus des six droites dont chacune compte pour quatre (les arêtes) et des trois droites simples (les transversales) :

Six plans tritangents dont chacun compte pour deux (ce sont les plans passant par une arête, ligne double, et par une transversale, ligne simple);

Quatre plans tritangents dont chacun compte pour huit parce qu'il est déterminé par trois lignes doubles (ces plans sont les quatre faces du tétraèdre);

Un plan tritangent simple (celui des trois transversales);

Total : neuf droites valant 27 et 11 plans tritangents valant 45.

Par la réunion de deux points coniques ou davantage, on a des points singuliers du degré plus élevé, dont un se représentera au Chapitre VII sous le nom de *point biplanaire,* mais dont nous n'avons pas besoin ici.

D. *Les droites imaginaires.* — Effacez de la figure 29 un des ovales avec les droites qui lui sont tangentes, puis un deuxième, puis un troisième. A chaque fois des double-six deviennent imaginaires, en totalité ou en partie et, par une analyse qui n'est pas des plus simples, vous arriveriez à reconnaître l'existence d'une nouvelle série de types qui, au lieu de réunir plusieurs droites en une seule, les fait passer du réel à l'imaginaire :

1.	27	droites réelles et	45	plans tritangents réels (type général),
2.	15	»	15	»
3.	7	»	5	»
4.	3	»	13	»
5.	3	»	7	»

§ 28. — L'hexagramme dans l'espace.

I. — Les droites de Pascal.

Considérons une surface du troisième degré ayant un point conique O. C'est le cas particulier traité dans l'article B du paragraphe 27, et nous reprenons notre description au point où la laisse cet article. Nous rappelons : 1° que la surface a vingt et une droites, dont six

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

passent par O et sont sur un cône du second degré, tandis que les quinze autres, désignées collectivement par la lettre δ, sont dans les quinze plans que déterminent les premières prises deux à deux; 2° que les droites δ, prises trois par trois, forment quinze triangles Δ, situés dans quinze autres plans que nous appellerons aussi Δ, et qui sont les plans tritangents de la surface ne passant pas par O. Ces quinze droites et ces quinze plans sont désignés respectivement par les symboles

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16;\quad 23,\ 24,\ 25,\ 26;\quad 34,\ 35,\ 36;\quad 45,\ 46;\quad 56,$$

et

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf;\quad cd,\ ce,\ cf;\quad de,\ df;\quad ef,$$

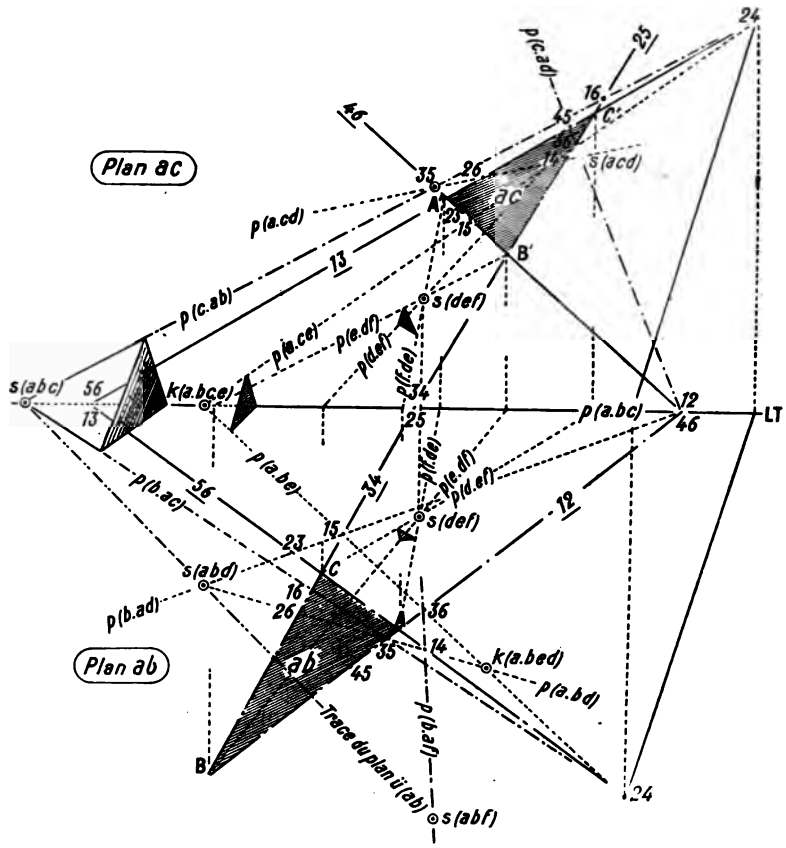
entre lesquels il existe, en vertu des formules (I) et (II) de la page 93, des relations qui ne sont autres que les formules (3) et (4) du paragraphe 12, page 46. Le lecteur voudra bien se reporter à ces dernières, que nous ne reproduirons pas ici; il devra oublier provisoirement la signification qu'avaient alors les chiffres et les lettres et leur attribuer celle du présent Chapitre.

Quand deux triangles Δ n'ont pas de côté commun, nous dirons qu'ils *forment un couple*, et nous dirons aussi la même chose de leurs plans. Le nombre des couples est *soixante*, parce que chaque plan ou triangle entre dans huit couples. Les deux plans d'un couple se coupent suivant une droite que nous appellerons *une droite de Pascal;* cette droite rencontre la surface en trois points j, en lesquels les trois côtés du triangle d'un des deux plans rencontrent respectivement ceux du triangle de l'autre plan. Par

exemple, l'intersection des deux plans

$$ab = 12\,34\,54, \qquad ac = 13\,25\,46$$

Fig. 33.



L'hexagramme dans l'espace.

(c'est *la ligne de terre* de l'épure 31, page 95) (1) rencontre la

(1) Nous ferons usage de l'épure 31 pour donner un corps à nos déductions, bien qu'elle représente une surface *générale* du troisième degré, et non une surface à point conique. Ce sera une preuve *de fait* de cette proposition sur laquelle nous insisterons plus loin, que les propriétés de l'hexagramme sont vraies dans le premier cas comme dans le second.

Nous avions admis jusqu'ici que l'angle des plans *ab* et *ac* de l'épure était *quel-*

surface aux points j : 13 56, 25 34. 12 46. Nous la désignerons par $\varpi(a.bc)$.

Les soixante couples donnent ainsi soixante droites de Pascal. Elles sont distribuées huit par huit dans les quinze plans, et il passe deux plans par chacune.

En un point j concourent deux droites δ, par exemple 12 et 46; par suite cinq plans tritangents passent par ce point : le plan *cd* déterminé par les deux droites; les deux plans tritangents qui passent par 12 et qui sont *ab*, *ef*; les deux qui passent par 46 et qui sont *af*, *bd*. Les quatre derniers plans font ensemble quatre couples Δ; donc quatre droites de Pascal concourent en chaque point j, et le nombre de ceux-ci est $\frac{60.3}{4} = 45$; chaque droite de Pascal en contient six, puisqu'elle rencontre deux droites δ dans chacun des trois plans auxquels elle appartient.

II. — Les points de Kirkman et les six pentaèdres.

Prenons un couple *ab ac*. Il contient six droites

12, 34, 56, 13, 25, 46

et les neuf autres droites forment trois triangles *ad*, *ae*, *af*. Les plans de ceux-ci forment *un trièdre,* dont les arêtes sont des droites de Pascal, et dont le sommet s'appellera *un point de Kirkman, k.* Chacun de ces plans forme couple avec un des deux premiers *ab*, *ac*, et constitue avec lui un autre trièdre; comme inversement tout trièdre contient trois couples, on en conclut que le nombre de ces trièdres, que nous appellerons *de première espèce,* est $\frac{60.3}{3} = 60$. C'est aussi celui des points k. Il passe trois droites de Pascal par chaque point k [1], et chacune en contient trois.

---

conque et nous ne pouvions alors figurer *que des points situés dans ces deux plans;* nous admettrons maintenant qu'il est *droit,* afin de pouvoir figurer les autres points par des projections à la façon ordinaire.

[1] Cette constatation et quelques autres de même genre seraient puériles en elles-mêmes, si ce n'était la démonstration intuitive qu'elles fournissent pour les théorèmes correspondants de l'hexagramme-plan.

Les soixante trièdres et les soixante couples se correspondent un à un, chacun des premiers contenant neuf droites situées dans ses trois faces, chacun des seconds six droites situées dans ses deux plans. Les trois faces du trièdre et les deux plans du couple forment ensemble *un pentaèdre*, qui contient toutes les droites δ, dont les dix sommets sont autant de points de Kirkman, et dont les dix arêtes respectivement opposées à ces sommets sont autant de droites de Pascal qu'on peut appeler *leurs correspondantes*. Chaque point k individualise un pentaèdre et, puisque chacun de ceux-ci a dix sommets, leur nombre est $\frac{60}{10} = 6$.

En conséquence, *les soixante droites de Pascal et les soixante points de Kirkman se divisent en six groupes formés chacun de dix droites et des dix points qui leur correspondent*. Ces points et droites sont les sommets et les arêtes d'un *pentaèdre* dont les faces sont des plans Δ. Chaque face d'un pentaèdre, associée avec les autres faces du même pentaèdre, donne quatre couples; mais chaque plan Δ entre dans huit couples et, par suite, appartient à deux pentaèdres; deux pentaèdres ont toujours un plan commun.

Deux plans Δ, tels que ab et ac, formant un couple, appartiennent à un même pentaèdre; mais deux plans ne formant pas couple, tels que ab et cd, se coupent suivant une droite d, par laquelle passe aussi le plan ef, puisque chaque pentaèdre contient toutes les quinze droites. Il suit de là que les six pentaèdres fournissent, pour les quinze plans tritangents Δ, une notation analogue à celle que les génératrices du cône O nous ont donnée pour les quinze droites d. Rien ne nous empêche de désigner les six pentaèdres par

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$$

car ces lettres isolées n'ont aucun sens jusqu'ici; alors la notation dont il s'agit se traduit par des formules identiques aux formules (4) et assigne les faces des six pentaèdres suivant un Tableau qui serait la reproduction de celui du paragraphe 12, page 46.

Nous pouvons donc maintenant *séparer* les éléments de ces binomes mystérieux ab, ac,... etc., qui nous accompagnent depuis le début du Chapitre III, et leur donner un sens géométrique. Ces binomes désignent *les plans communs de six pen-*

taèdres déterminés, et leurs éléments a, b, c, d, e, f *ne sont autre chose que ces pentaèdres eux-mêmes.* Ceux-ci peuvent être pris comme données premières; ils définissent alors nos quinze plans par leurs associations deux à deux comme le montrent les formules (4) et puis ceux-ci définissent les quinze droites par leurs associations trois à trois, comme le montrent les formules (3).

III. — Les points de Steiner.

1. Les trois couples de droites $\hat{o}$, par exemple

$$12\,46,\quad 25\,34,\quad 13\,56,$$

concourantes en trois points j d'une droite de Pascal $\varpi(a.bc)$ (qui est la *ligne de terre* de l'épure 33, intersection des plans ab, ac), donnent *six triangles* que réunit le carré suivant :

$$\begin{array}{lll} 12 & 34 & 56\ldots ab \\ 46 & 25 & 13\ldots ac \\ 35 & 16 & 24\ldots bc \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ fe. & ep. & fp. \end{array}$$

On a les trois premiers en lisant le carré *par lignes* et les trois autres en le lisant *par colonnes* (1). Chaque groupe de trois forme un *terne de seconde espèce.*

Au lieu des triangles on peut considérer les plans les continuant et les désigner par les mêmes binomes littéraux. Nous dirons des plans ou triangles d'un même terne qu'ils sont *associés entre eux,* et des deux ternes qu'ils sont *conjugués l'un de l'autre.* Les deux ternes de plans forment *deux trièdres,* que nous appellerons *de seconde espèce,* et qui sont de même conjugués l'un de l'autre. Prenons d'abord le premier $ab\ ac\ bc$.

Les deux triangles ab et ac se voient de suite sur l'épure 33 : ce sont les deux triangles teintés, situés, l'un ABC dans le plan ab (plan de la feuille), l'autre A′B′C′ dans le plan ac (rabattu sur la feuille). Les côtés de leur associé bc, ou A″B″C″, ont pour traces sur ces deux plans les points 16, 24, 35 et le plan bc a pour traces

(1) Comparez § 12, page 53.

les deux lignes droites qui, dans chacun d'eux, contiennent ces trois points. Mais le triangle, moins favorisé que son homonyme de la figure 20, a deux sommets, A″ et C″, trop éloignés pour que leurs projections puissent être représentées, et nous n'avons pas représenté celles de B″. Les trois arêtes du trièdre sont la ligne de terre et les deux lignes 16 24 35, qui sont dessinées en *trait mixte* et vont se couper sur la ligne de terre en un point marqué $s(abc)$. Nous appellerons celui-ci *un point de Steiner*.

Les arêtes du trièdre conjugué *de df ef* ont pour traces sur *ab* et *ac* les sommets des deux triangles ombrés. Elles se rencontrent dans l'espace en un point unique marqué $s(def)$ et représenté par ses deux projections : c'est aussi un point de Steiner, duquel nous dirons qu'il est *conjugué du précédent*.

Tout couple de triangles Δ détermine de même deux trièdres conjugués et, comme chaque trièdre comprend trois couples, le nombre des trièdres dont il s'agit est $\frac{60}{3} = 20$, conjugués deux à deux. Leurs arêtes sont les soixante droites de Pascal.

Chaque droite de Pascal contient un point de Steiner, sommet d'un trièdre de second espèce. Mais d'autre part, puisque les dix droites de Pascal contenues dans un pentaèdre en sont les arêtes, elles se rencontrent exclusivement sur les dix sommets, qui sont des points *k*. Par suite, les trois droites de Pascal concourantes en un point de Steiner appartiennent à trois pentaèdres différents; le point de Steiner est commun à ces trois pentaèdres, tandis que son conjugué l'est aux trois autres. La notation $s(abc)$ exprime cette participation du point O aux trois pentaèdres *a*, *b*, *c*; elle montre encore que ce point est l'intersection des trois plans tritangents conjugués *ab*, *bc*, *ca*; elle fait ressortir que les quatre points $s(abc, abd, abe, abf)$ sont communs aux deux pentaèdres *a* et *b*, et se retrouvent dans le plan *ab*. Si l'on veut vérifier ce dernier point, il suffit d'observer — qu'un plan face d'un trièdre entre dans deux des trois couples appartenant à ce trièdre; — que tout plan Δ est commun à huit couples, appartient par suite à quatre trièdres différents et contient quatre points σ.

IV. — Les plans de Plücker.

Considérons les quatre points σ situés dans le plan ab, desquels partent, sortant de ce plan, les quatre droites de Pascal

$$\varpi(c.ab,\ d.ab,\ e.ab,\ f.ab).$$

Deux quelconques de ces quatre droites se rencontrent. En effet, en vertu des formules (4), les plans ac, bd se coupent suivant une droite 46, par laquelle passe aussi le plan ef; les plans bc, ad se coupent suivant une droite 35 que contient aussi le même plan ef. Donc les quatre plans ac, bc, ad, bd, dont les deux premiers se coupent suivant $\varpi(c.ab)$ et les deux autres suivant $\varpi(d.ab)$, ont un point commun. Comme on peut faire le même raisonnement pour deux quelconques des quatre droites, elles se rencontrent toutes deux à deux et par suite sont dans un même plan. Nous appellerons celui-ci un plan de Plücker, et le désignerons par le symbole $\ddot{u}(ab)$; les six sommets du quadrilatère formé par ses quatre droites de Pascal sont des points j.

Il passe deux plans de Plücker par chaque point j; en effet le point j intersection des droites

$$35 = ad\,bc\,ef, \qquad 46 = ac\,bd\,ef$$

est dans le plan de Plücker $\ddot{u}(ab)$ comme dans celui $\ddot{u}(cd)$. Nous avons vu qu'au même point j concourent quatre droites de Pascal: des six plans que ces droites déterminent deux à deux, quatre sont des plans Δ et deux des plans $\ddot{u}$.

V. — Les droites de Steiner et l'hexaèdre polaire.

Les quatre points $s(abc,\ abd,\ abe,\ abf)$ sont à la fois dans le plan tritangent $\Delta(ab)$ et dans le plan de Plücker $\ddot{u}(ab)$. Ils sont donc en ligne droite; nous appellerons celle-ci *une droite de Steiner* et la désignerons par $t(ab)$. Ainsi il correspond aux quinze plans Δ : quinze plans de Plücker $\ddot{u}$ qui contiennent chacun quatre droites de Steiner, et quatre droites de Steiner t qui contiennent chacune quatre points de Steiner.

Réciproquement, il passe par le point $s(abc)$ les trois droites de Steiner $t(ab)$, $t(bc)$, $t(ca)$.

Deux droites se coupent en un point de Steiner si leurs symboles ont une lettre commune. Par exemple, $t(ab)$ et $t(ac)$ se coupent sur $s(abc)$. Il suit de là que les cinq droites

$$t(ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af)$$

se coupent deux à deux et sont dans un même plan; elles y forment un 5-latère dont les dix sommets sont autant de points de Steiner. Donc les vingt points de Steiner sont dix par dix et les quinze droites de Steiner cinq par cinq dans six plans ; en d'autres termes, *les premiers sont les vingt sommets, opposés ou conjugués deux à deux, et les secondes sont les quinze arêtes d'un hexaèdre* A′ *qui forme en quelque sorte le noyau de toute la figure :* c'est le fameux *hexaèdre polaire* des auteurs allemands. Nous désignerons ses faces par a', b', c', d', e', f'; elles correspondent aux six pentaèdres en ce sens, par exemple, que a' contient les droites de Steiner situées dans les faces du pentaèdre a, etc.

VI. — Les droites de Cayley.

Considérons les trois trièdres ayant respectivement pour faces les plans

$$\begin{array}{llll} ad, & bd, & cd, & \ldots,\ (d), \\ ae, & be, & ce, & \ldots,\ (e), \\ af, & bf, & cf, & \ldots,\ (f); \end{array}$$

comme on voit, ils ont pour sommets des points de Kirkman et pour arêtes des droites de Pascal appartenant les uns et les autres aux pentaèdres d, e, f.

Les arêtes des deux premiers trièdres, prises par couples,

$$\begin{array}{lll} p(d.ab) & \text{et} & p(e.ab), \\ p(d.ac) & \text{et} & p(e.ac), \\ p(d.bc) & \text{et} & p(e.bc), \end{array}$$

sont ensemble dans les plans de Plücker

$$\ddot{u}(ab),\quad \ddot{u}(ac),\quad \ddot{u}(bc)$$

et, par suite, se rencontrent en trois points j. Dès lors les deux trièdres sont perspectifs. Ces trois points j sont les sommets d'un triangle inscrit dans le premier trièdre et ayant pour côtés les

droites de Pascal

$$p(a.de), \quad p(b.de), \quad p(c.de),$$

ce qui montre que le plan du triangle n'est autre que le plan de Plücker $\ddot{u}(de)$.

En remplaçant le second trièdre par le troisième, on obtient un autre triangle inscrit dans le premier et ayant pour côtés les droites de Pascal

$$p(a.df), \quad p(b.df), \quad p(c.df)$$

situées dans le plan de Plücker $\ddot{u}(df)$. Puisque les deux triangles sont perspectifs, leurs côtés homologues se rencontrent en trois points d'une ligne droite qui est l'intersection des plans de Plücker $\ddot{u}(de)$, $\ddot{u}(df)$ et qui passe par le point de Steiner $s(def)$, attendu que celui-ci est dans chacun des deux plans. Mais ces points de rencontre des côtés homologues ne sont autre chose que les points de Kirkman

$$k(a.def), \quad k(b\ def), \quad k(c,def)$$

appartenant respectivement aux pentaèdres a, b, c et correspondant aux droites de Pascal

$$p(a.bc), \quad p(b.ca), \quad p(c.ab),$$

qui concourent sur le point de Steiner $s(abc)$. Il en résulte un énoncé tout pareil à celui du paragraphe **17**, amenant dix couples de droites de Cayley conjuguées, tels que $y(abc)$ et $y(def)$.

La droite de Cayley $y(def)$ passe par le point de Steiner $s(def)$ et est dans les plans de Plücker $\ddot{u}(de)$, $\ddot{u}(df)$. On prouverait de la même manière qu'elle est aussi dans le plan $\ddot{u}(ef)$ et, en outre, que celui-ci contient encore les trois autres droites

$$y(cef,\ bef,\ def).$$

Donc les vingt droites y sont quatre par quatre dans les quinze plans $\ddot{u}$, et il passe trois de ces plans par chacune d'elles.

VII. — Les plans de Salmon.

Considérons les deux pentaèdres a et b. Leurs faces non communes

$$ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf$$

forment deux tétraèdres perspectifs. En effet les faces correspondantes se coupent suivant des droites de Pascal

$$p(c.ab),\quad p(d.ab),\quad p(e.ab),\quad p(f.ab)$$

qui sont situées dans un même plan $\ddot{u}(ab)$, d'où il suit que les quatre droites qui joignent deux sommets correspondants, tels que

$$k(a.def) \text{ et } k(b.def),\quad \text{et}\quad k(a.cef) \text{ et } k(b.cef),\quad \ldots,$$

concourent en un même point. Comme ces couples de points sont sur les droites de Cayley

$$y(def,\ cef,\ bef,\ aef),$$

la même conclusion s'applique à celles-ci. Donc *les quatre droites de Cayley communes à deux pentaèdres concourent en un même point :* c'est (*voir* § **18**) un *point de Salmon* $m(ef)$.

Le point de Salmon $m(ef)$ est un centre de perspective commun à trois tétraèdres. Nous venons de voir les deux premiers, formés par les faces non communes des deux pentaèdres a et b; le troisième a pour sommets les points de Steiner conjugués des quatre qui sont sur la droite de Steiner $t(ef)$, et pour faces les faces c', d', e', f', de l'hexaèdre A'. Les faces correspondantes du premier et du troisième se coupent sur les droites de Steiner

$$t(fd,\ fc,\ fb,\ fa)$$

et, par suite, leur plan d'homologie est f'; semblablement, c'est le plan d'homologie du second et du troisième; quant aux premier et deuxième, nous avons vu que leur plan d'homologie est $\ddot{u}(ef)$. La droite de Cayley $y(def)$ contient donc trois centres de perspective, qui sont des sommets des pentaèdres f, e, d, et ne sont autre chose que les points de Salmon $m(ef)$, $m(df)$, $m(cf)$. Donc les points m sont au nombre de quinze, alignés par trois sur les

vingt droites y. On peut voir en outre qu'ils sont par six sur les plans de Plücker, qui sont les plans projetants des arêtes des trois tétraèdres perspectifs, etc.

VIII. — Retour a l'hexagramme de Pascal.

Projetons du point O, sur un plan quelconque, les points et droites que nous avons vu naître avec tant de profusion et que nous avons essayé de débrouiller. Les droites 1, 2, 3, 4, 5, 6 coupent ce plan suivant une conique, pour laquelle rien ne nous empêche de prendre la conique des six points fondamentaux (1), paragraphe **12**; les soixante couples de triangles Δ donnent ceux que nous avons désignés par la même lettre dans le Chapitre précédent; les six pentaèdres donnent les six figures A; les droites de Pascal, les points de Steiner, etc. donnent les droites et points qui portent les mêmes dénominations dans l'hexagramme et que nous n'avons d'ailleurs adoptées qu'en prévision de l'identification que nous faisons maintenant. Tous les théorèmes du Chapitre précédent se trouvent ainsi démontrés à nouveau, et la subordination de la figure plane à celle de l'espace est mise en évidence.

§ 29. — L'hexagramme dans l'espace (*suite*).

Le paragraphe précédent traite la question par la Géométrie; on va voir l'Analyse s'y appliquer avec non moins d'aisance et y apporter son genre de lumière particulier (1).

1. Nous référant toujours aux formules (3), page 46, considérons les deux *carrés de binomes*

$$\begin{array}{ll} ab = 12\ 34\ 56, & ef = 12\ 35\ 46, \\ ac = 13\ 25\ 46, & df = 13\ 24\ 56, \\ bc = 16\ 24\ 35, & de = 16\ 25\ 34; \end{array}$$

ce sont maintenant six plans tritangents formant les deux trièdres conjugués décrits à la page 108 et figurés dans l'épure 33. On sait

(1) Les considérations qui suivent s'appliquent également, soit que l'on considère les quinze droites sur la surface donnée d'un point conique, ou sur la surface générale.

qu'il existe *dix couples* de trièdres pareils (¹); chacun d'eux pourrait être employé au même titre et de la même façon que celui que nous venons de choisir.

Soient, dans un système quelconque de coordonnées cartésiennes,

$$(1)\qquad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0$$

les équations respectives des plans

$$ab,\ ac,\ bc;\quad ef,\ df,\ de.$$

Celles de leurs *neuf droites d'intersection* sont alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} 12: \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_4 = 0; \end{cases} & 42: \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_5 = 0; \end{cases} & 52: \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_6 = 0; \end{cases} \\ 13: \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_5 = 0; \end{cases} & 43: \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_6 = 0; \end{cases} & 53: \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_4 = 0; \end{cases} \\ 16: \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_6 = 0; \end{cases} & 46: \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_4 = 0; \end{cases} & 56: \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_5 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

et nous allons d'abord chercher celles des six autres droites du système.

Comme l'équation de la surface doit être satisfaite par une quelconque de ces combinaisons des α elle est nécessairement de la forme

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \lambda\alpha_4\alpha_5\alpha_6.$$

Or on peut écrire ainsi les équations des six plans, en y introdui-

---

(¹) Ce chiffre de *dix* est relatif aux *quinze droites* représentées par un symbole de deux chiffres. Si l'on a affaire à la surface générale, il s'ajoute à celle-ci les douze droites du double-six fondamental (*voir* les deux Tableaux à la fin du paragraphe 22); alors il y a encore vingt couples de trièdres conjugués de la forme

$$12'\ 23'\ 31';\quad 21'\ 32'\ 13'$$

et quatre-vingt-dix de la forme

$$12\ 34\ 56,\ 14',\ 32';\quad 14\ 23\ 56,\ 34',\ 12',$$

ce qui en fait *cent vingt* en tout.

sant huit paramètres nouveaux a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$(1') \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \\ \alpha_5 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4, \\ \alpha_6 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 + b_4\alpha_4, \end{cases}$$

car le nombre des paramètres est *dix-huit* dans la nouvelle forme comme dans l'ancienne. Si nous posons

$$(4) \qquad x_1 = p_1\alpha_1, \quad x_2 = p_2\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_6 = p_6\alpha_6,$$

$$(5) \qquad \begin{cases} p_1 = a_1p_5 + b_1p_6 = 0, \\ p_2 = a_2p_5 + b_2p_6 = 0, \\ p_3 = a_3p_5 + b_3p_6 = 0, \\ p_4 = a_4p_5 + b_4p_6 = 0, \end{cases}$$

il est clair que nous aurons, *toujours et forcément,*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0.$$

Cette relation se présente avec le caractère particulier d'une *identité,* c'est-à-dire se satisfait d'elle-même, en conséquence des coefficients implicitement contenus dans les polynomes x, quelles que soient les valeurs attribuées aux coordonnées simples ; nous accentuerons *ce caractère d'identité* en substituant le signe spécial $\equiv$ au signe ordinaire $=$.

Aux quatre équations en p_1 ajoutons celle-ci

$$p_1p_2p_3 + \lambda p_4p_5p_6 = 0$$

et éliminons p_1, p_2, p_3, p_4 : il vient une équation du troisième degré en $\frac{p_5}{p_6}$. En calculant les p avec une racine de cette équation, les α de l'équation (3) sont remplacés par les x, et son coefficient λ par l'unité. *La surface est représentée maintenant par ces deux équations*

$$(6) \qquad x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 = 0,$$

$$(7) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv 0,$$

et nous rappelons que x_1, x_2, x_3, ... désignent des fonctions linéaires déterminées des coordonnées proprement dites, aucun nom n'étant attribué à celles-ci, parce que nous n'avons pas à les considérer en elles-mêmes.

2. D'après (2) et (4), les équations

$$x_3 + x_4 = 0, \qquad x_1 + x_5 = 0, \qquad x_2 + x_6 = 0$$

représentent trois plans passant respectivement par les droites 12, 42, 52. En vertu de (7), ces plans passent par une même droite et cette commune intersection a pour équations

$$x_3 + x_4 = x_1 + x_5 = x_2 + x_6 = 0. \tag{8}$$

Elle est sur la surface, car les équations (6), (7), (8) sont satisfaites toutes les trois par

$$x_3 = -x_4, \qquad x_1 = -x_5, \qquad x_2 = -x_6.$$

Puisqu'elle est dans un même plan avec 12, avec 42 et avec 52, c'est, en vertu de la *loi des rencontres* (p. 84), celle des droites de la surface dont le symbole ne contient aucun des chiffres 1, 2, 4, 5, c'est-à-dire la droite 36; (8) est donc l'équation de celle-ci.

Faisant le même raisonnement avec les droites 13, 43, 53, puis 16, 46, 56, nous trouverons de même que

$$x_2 + x_5 = x_3 + x_6 = x_1 + x_4 = 0$$

et

$$x_1 + x_6 = x_2 + x_4 = x_3 + x_5 = 0$$

sont les équations des droites 26 et 23.

Prenant ensuite le Tableau (2) par colonnes verticales, la première nous donnera les équations de la droite qui exclut de son symbole les chiffres 1, 2, 3, 6, c'est-à-dire 45, la deuxième celle qui exclut 2, 3, 4, 6, c'est-à-dire 15, et la troisième celle qui exclut 2, 3, 5, 6, c'est-à-dire 14.

On a dès lors les équations des quinze droites, mais sous deux formes différentes : neuf sous la forme (2), où l'on peut remplacer la lettre α par la lettre x, et six sous la forme (8). Il convient, pour la symétrie, de ramener celles-là à celles-ci, l'inverse étant évidemment impossible.

A cet effet, reprenons la question *ab ovo* et partons d'un autre couple de trièdres conjugués, par exemple

$$de, \quad ae, \quad ad; \quad cf, \quad bf, \quad bc,$$

aux six plans duquel nous donnerons respectivement les équa-

tions

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = 0; \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_6 = 0.$$

En raisonnant de la même manière, nous mettrons encore l'équation de la surface sous la forme (6. 7) et nous obtiendrons les équations des six droites

$$12, \quad 13, \quad 23; \quad 64, \quad 65. \quad 45$$

sous la forme demandée. Mais, en réalité, cela ne nous en donne que quatre nouvelles, car 13 et 45 se trouvent déjà dans le lot précédent. Prenons alors un troisième couple, par exemple

$$ef, \quad fa, \quad ae; \quad cd, \quad cb, \quad bd$$

avec les équations

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_5 = 0, \quad \gamma_6 = 0: \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_4 = 0, \quad \gamma_3 = 0;$$

nous aurons les droites 13, 14, 34, et 25, 26, 56, ce qui nous en fera quatorze. La dernière s'obtiendra de même avec le couple

$$df, \quad af, \quad ad; \quad ec. \quad be, \quad bc$$

$$\delta_1 = 0 \quad \delta_4 = 0, \quad \delta_6 = 0; \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_5 = 0.$$

On aura ainsi formé les quinze équations qui occupent la gauche du Tableau suivant. Celles de droite s'en déduisent à première vue en vertu des équations (3) : par exemple, *ab* a pour équation $x_1 + x_2 = 0$ parce que cette équation se trouve dans les lignes qui, à gauche, ont pour en-tête 12, 34 et 56. Et si l'on observe la loi très simple suivant laquelle procèdent les indices dans les équations de droite, on verra l'*idée* qui présida, dès le début du Chapitre précédent, à l'attribution réciproque des lettres et des chiffres. Cette attribution est aussi celle adoptée par Cremona et par Richmond; c'est un peu différent dans Veronese, Klein et Zeuthen et Cayley.

$$\begin{cases} 12 \ldots & x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 0, \\ 13 \ldots & x_1 + x_3 = x_2 + x_5 = x_4 + x_6 = 0, \\ 14 \ldots & x_1 + x_4 = x_2 + x_6 = x_3 + x_5 = 0, \\ 15 \ldots & x_1 + x_5 = x_2 + x_4 = x_3 + x_6 = 0, \\ 16 \ldots & x_1 + x_6 = x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} ab \ldots & x_1 + x_2 = 0, \\ ac \ldots & x_1 + x_3 = 0, \\ ad \ldots & x_1 + x_4 = 0, \\ ae \ldots & x_1 + x_5 = 0, \\ af \ldots & x_1 + x_6 = 0; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
23\ldots\ x_1+x_6=x_2+x_4=x_3+x_5=0, & bc\ldots\ x_2+x_3=0.\\
24\ldots\ x_1+x_5=x_2+x_3=x_4+x_6=0, & bd\ldots\ x_2+x_4=0,\\
25\ldots\ x_1+x_3=x_2+x_6=x_4+x_5=0, & be\ldots\ x_2+x_5=0,\\
26\ldots\ x_1+x_4=x_2+x_5=x_3+x_6=0; & bf\ldots\ x_2+x_6=0;\\
34\ldots\ x_1+x_2=x_3+x_6=x_4+x_5=0, & cd\ldots\ x_3+x_4=0,\\
35\ldots\ x_1+x_4=x_2+x_3=x_5+x_6=0, & ce\ldots\ x_3+x_5=0.\\
36\ldots\ x_1+x_5=x_2+x_6=x_3+x_4=0; & cf\ldots\ x_3+x_6=0;\\
45\ldots\ x_1+x_6=x_2+x_5=x_3+x_4=0, & de\ldots\ x_4+x_5=0,\\
46\ldots\ x_1+x_3=x_2+x_4=x_5+x_6=0; & df\ldots\ x_4+x_6=0;\\
56\ldots\ x_1+x_2=x_3+x_5=x_4+x_6=0. & ef\ldots\ x_5+x_6=0.
\end{array}\right.$$

3. L'équation (7) peut s'écrire

$$(x_1+x_2+x_3)\equiv-(x_4+x_5+x_6),$$

ou, en élevant au cube et ramenant tout dans le même membre,

$$0\equiv x_1^3+x_2^3+\ldots+x_6^3$$
$$+(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_4+x_5)(x_5+x_6)(x_6+x_4).$$

Mais, d'après le Tableau IV, la seconde ligne se réduit à zéro, et les équations de la surface deviennent

$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_6^3=0,$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_6\equiv 0.$$

L'ensemble de ces deux relations s'appelle *l'équation canonique*. On y peut remplacer la première, suivant la commodité, soit par une quelconque des combinaisons analogues à

$$x_1x_2x_3+x_4x_5x_6=0,$$

soit par une quelconque de celles analogues à

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_4+x_5)(x_5+x_6)(x_6+x_4);$$

ces combinaisons sont au nombre de *vingt* (1).

(1) H.-N. Taylor (*Philosophical Transactions of the R. S. of London*, vol. 135A, 1895, page 37) traite la question en employant cette autre et intéressante forme de

Afin de donner une application de ces formules, vraies évidemment pour la surface générale, montrons comment on écrirait l'équation de celle qui contient les vingt-sept droites de l'épure 31. Par des mesures prises sur cette figure, il est facile de poser les équations des six plans tritangents qui forment deux trièdres conjugués, et qui résultent des dix-neuf points formant les données de la construction, page 94.

En représentant ces équations par $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., l'équation demandée sera

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \lambda\alpha_4\alpha_5\alpha_6 = 0$$

et le coefficient λ se déterminera en substituant les coordonnées d'un point quelconque, mesurées aussi sur l'épure.

4. Voici quelques conséquences des équations de la page 118 : les six équations

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_6 = 0$$

représentent les faces d'un *hexaèdre* qui a vingt sommets s conjugés deux à deux, tels que

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

et quinze arêtes telles que

$$x_1 = x_2 = 0,$$

sur lesquelles ces sommets sont distribués par quatre ; il passe par chaque arête un des quinze plans tritangents.

Les quinze plans

$$x_1 = x_2, \qquad x_1 = x_3, \qquad \ldots, \qquad x_4 = x_5, \qquad x_5 = x_6$$

sont les *plans de Plücker* et correspondent un à un aux plans tritangents.

---

l'équation générale du troisième degré entre trois coordonnées

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = (\alpha_1 - \beta)(\alpha_2 - \beta)(\alpha_3 - \beta)(\alpha_4 - \beta),$$

α_1, α_2, α_3, α_4 et β étant cinq polynomes linéaires.

Les cinq plans

$$x_1+x_2=0,\quad x_1+x_3=0,\quad x_1+x_4=0,\quad x_1+x_5=0,\quad x_1+x_6=0$$

forment un *pentaèdre,* auquel s'en joignent cinq autres donnés par des équations analogues. Ces six pentaèdres A ont pour faces des plans tritangents. Deux quelconques d'entre eux ont une face commune. Chacun a *dix arêtes* qui sont des droites p (droites de Pascal) et *six sommets* qui sont des points k (points de Kirkman).

L'équation

$$-x_1=x_2=x_3$$

et ses semblables sont les soixante droites p; quatre de ces droites telles que

$$-x_3=x_4=x_6,\quad -x_4=x_2=x_5,\quad -x_5=x_1=x_6,\quad -x_6=x_3=x_5,$$

passent par un même point s

$$x_1+x_2=0,\qquad x_3=-x_4,\qquad x_5=-x_6;$$

trois telles que

$$-x_1=x_2=x_3,\qquad -x_1=x_3=x_4,\qquad x_1=x_2=x_4$$

passent par un même point k

$$-x_1=x_2=x_3=x_4.$$

Par chaque droite p il passe un plan tritangent et deux plans de Plücker; il y a huit droites p dans chaque plan tritangent, et quatre dans chaque plan de Plücker.

Si l'on prend six droites telles que

$$12,\ 23,\ 31,\ 45,\ 56,\ 64,$$

chacune des trois premières coupe chacune des trois autres en vertu de la loi des rencontres, et leurs associations deux à deux déterminent neuf plans dont les équations ont pour premiers membres

	45.	56.	46.
12.....	x_3+x_4,	x_1+x_2.	x_5+x_6,
23.....	x_1+x_6,	x_3+x_5,	x_2+x_4,
31.....	x_2+x_5,	x_4+x_6,	x_1+x_3.

Ces droites sont les génératrices d'une surface réglée du second degré dont on peut écrire de suite l'équation (1)

$$x_1^2 + x_4^2 + x_5^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_6^2.$$

Il y a en tout dix quadriques de ce genre, les indices de leurs équations présentant les dix permutations que nous avons rencontrées pour la première fois dans le Tableau des points de Steiner. Deux quelconques de ces quadriques, par exemple la précédente et celle-ci

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_1^2,$$

qui passe par les droites 13, 34, 41, 25, 56, 62, ont en commun les génératrices 13 et 56; et leur intersection complète est formée par ces deux droites jointes à la conique $x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2$.

5. Lorsque la surface a un point conique O, dont soient a_1, $a_2, \ldots, a_6$ les coordonnées, l'identité (7), page 116, est remplacée par

$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_6^2 x_6 = 0,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 0, \qquad a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_6^3 = 0,$$

et l'on a, au point conique lui-même,

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_6}{a_6}.$$

Si l'on projette du point O sur un plan quelconque $\varphi = 0$, les rayons 1, 2, 3, 4, 5, 6 couperont ce plan en six points situés sur une conique, et les droites 12, 13, ..., 56 s'y projetteront suivant les quinze droites joignant ces six points deux à deux. Il n'est pas nécessaire de spécifier le plan de projection, car on peut considérer les équations des *figures projetantes* (qui sont des droites, des plans, des cônes... passant par le point O) comme représentant aussi les points, les droites, les coniques,... qu'elles contiennent : il sera tout simplement sous-entendu qu'on leur adjoint

(1) Il est clair en effet que cette équation est satisfaite par la substitution de $-x_2$, $-x_3$, $-x_6$ à x_1, x_4, x_5, ou par une des cinq autres substitutions analogues qu'indiquent les équations des droites.

l'équation $\varphi = 0$. L'*opération analytique* de la projection se réduit donc à former ces projections. On trouve, par exemple, que le *cône des six rayons* a pour équation

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_6 x_6^2 = 0,$$

qui représentera aussi *la conique des six points*.

§ 30. — Observations sur la méthode de Cremona.

1. Telle est, dans ses premiers traits, la très élégante méthode esquissée par Cremona en 1877 dans les *Atti* de l'Académie romaine *dei Lincei,* développée brillamment, en 1874, par Richmond dans les *Transactions de la Société philosophique* de Cambridge. Par la simplicité et la symétrie de ses équations, elle permet de donner un seul exemple de chaque type, des permutations fournissant le système complet des types similaires; elle donne une prompte réponse à toute question sur la correspondance entre les divers éléments, le nombre de ceux d'un type donné, etc.

En outre elle rend évidentes et intuitives la plupart des propositions concernant l'hexagramme plan; par exemple, quand on a vu que trois droites sont les projections des intersections de trois plans deux à deux, on n'a pas besoin d'autre chose pour dire qu'elles sont concourantes. L'espace est à ce point de vue *plus simple* que le plan : dans celui-ci, deux droites *se coupent toujours,* et c'est une complication inutile, car leur intersection ne joue un rôle dans la figure de l'hexagramme que lorsqu'elles sont les projections de deux droites de l'espace *qui se coupent;* le meilleur moyen de laisser dehors les points inutiles est donc de remonter du plan dans l'espace.

2. Ce n'est que dans l'*opération de projection* que nous avons fait usage du point singulier de la surface du troisième degré. Mais, au lieu de la surface ainsi particularisée, rien ne nous empêche de prendre la surface générale, d'y mettre de côté douze droites formant un double-six et d'employer les quinze autres comme nous l'avons fait dans l'un ou l'autre des deux paragraphes précédents. Les projections des quinze droites ne passeront plus par six points d'une conique, mais n'en auront pas moins soixante

droites de Pascal. Si, pour préciser, nous plaçons le centre de perspective comme le suppose l'épure de Zeuthen, nous voyons qu'on peut, parmi les vingt-huit doubles tangentes d'une courbe du quatrième degré à quatre ovales, prendre de trente-six manières un lot de quinze de ces tangentes ayant les mêmes propriétés que les quinze droites de l'hexagramme de Pascal.

Celles-ci ne sont donc pas la seule famille jouissant de cette prérogative, et celle qui vient de nous apparaître n'est elle-même. évidemment, qu'un cas particulier parmi bien d'autres. Pour que quinze droites dans le plan possèdent les nombreuses propriétés dont nous avons aperçu l'ensemble de loin, il faut et il suffit qu'elles soient les projections de quinze droites de l'espace ayant la position définie par les équations de la page 118, c'est-à-dire *situées trois par trois dans quinze plans.* C'est ce qu'on peut appeler *la figure de Cremona,* et celle de l'hexagramme tient ses propriétés de ce qu'elle en est la projection sur un plan. Nous allons voir qu'à son tour la première a une origine quadridimensionnelle. Au fond, et peut-être sans le savoir, Cremona ne faisait d'ailleurs pas autre chose que de la Géométrie à quatre dimensions, car son système de *deux* équations *homogènes* entre *six* variables, (6) et (7), page 116, équivaut à une équation entre *quatre* coordonnées *ordinaires,* c'est-à-dire est un lieu relevant de cette Géométrie.

CHAPITRE V.

L'HEXAGRAMME ET L'HEXASTIGME.

§ 31. — Éléments de l'hexastigme.

Nous empruntons aux auteurs anglais le mot *hexastigme* pour désigner la figure formée dans l'étendue par *six points*

1, 2, 3, 4, 5, 6

dont cinq quelconques ne sont pas dans un même espace.

Outre ces six points fondamentaux, ou *sommets,* la figure présente encore : *quinze droites,* ou *arêtes,* joignant les sommets deux à deux :

12, 13, 14, 15, 16,
23, 24, 25, 26,
34, 35, 36,
45, 46,
56;

vingt faces planes, ou *triangles :*

123, 124, 125, 126, 456, 356, 346, 345,
134, 135, 136, 256, 246, 245,
145, 146, 236, 235,
156; 234;

et *quinze espaces,* ou *cases tétraédrales,* ou *figures limitantes,* ayant dans l'hypercorps le même rôle que les *polygones limitants* des polyèdres :

12 34, 12 35, 12 36, 12 45, 12 46, 12 56,
13 45, 13 46, 13 56, 14 56,
23 45, 23 46, 23 56, 24 56, 34 56.

Dans la terminologie du Chapitre II, le solide à quatre dimensions qui va nous occuper s'appellerait donc un *pentadécaédroïde.* Dans ce qui suit nous le désignerons quelquefois abréviativement par l'initiale **H**.

Deux faces planes, telles que 123 et 456, dont les désignations comprennent ensemble les six numéros, sont dites *opposées;* elles n'ont qu'un point commun, que nous appellerons *croisillon,* et que nous désignerons indifféremment par p_{123} ou p_{456}.

Trois arêtes, telles que 12, 34 et 56, dont les désignations comprennent ensemble les six numéros, sont appelées *alternes.*

Une arête et un espace, tels que 12 et 3456, dont les désignations comprennent ensemble les six numéros, seront dits *opposés;* leur point d'intersection sera appelé *un point diagonal* et désigné par p_{12}; il sera le *point diagonal de l'arête* 12 si on le considère sur cette arête, et le *point diagonal de l'espace* 3456 si on le considère comme appartenant à cet espace.

Sur la même arête 12 nous noterons un deuxième point, celui qui est harmonique avec le point diagonal par rapport aux deux sommets 1 et 2; nous l'appellerons *le point harmonique* de l'arête 12, et nous le désignerons par q_{12}.

Lorsque trois points diagonaux tels que p_{12}, p_{34}, p_{56} appartiennent à des arêtes alternes, c'est-à-dire lorsque leurs indices se complètent naturellement à 1, 2, 3, 4, 5, 6, ils sont en ligne droite; car ils appartiennent aussi, respectivement, aux trois espaces 3456, 5612, 1234 et, par suite, à la droite suivant laquelle ces espaces se coupent. Une pareille droite, qui rencontre les trois arêtes 12, 34, 56, sera appelée *une transversale de l'hexastigme* et sera désignée par $\theta(12\ 34\ 56)$. Cette notation pouvant signifier à volonté ou qu'elle coupe les trois arêtes 12, 34 et 56, ou qu'elle contient les trois points p_{12}, p_{34}, p_{56}. *Il y en a quinze,* parce qu'on peut faire avec six chiffres quinze groupes de trois couples chacun.

Voici, jusqu'à présent, les choses qui se rencontrent sur chaque sorte d'élément de la figure dont nous entreprenons l'étude :

1° *Sur une arête,* par exemple 12, il y a deux sommets 1 et 2, un point diagonal p_{12}, un point harmonique q_{12}.

2° *Sur une face plane* 135, il y a dix points, savoir : les trois sommets 1, 3, 5; les trois diagonales p_{35}, p_{51}, p_{13}; les trois points

harmoniques q_{35}, q_{51}, q_{12}; et enfin, seul de son espèce, le croisillon p_{135}. En ce dernier se rencontrent forcément les trois droites allant des trois sommets aux points diagonaux des côtés opposés; par suite, en vertu d'une propriété du triangle, *les trois points de chacun de ces quatre groupes*

$$p_{13},\ p_{15},\ q_{35},$$
$$p_{13},\ p_{35},\ q_{15},$$
$$p_{15},\ p_{35},\ q_{13},$$
$$q_{13},\ q_{35},\ q_{51}$$

sont en ligne droite.

3° *Dans un espace,* par exemple 1234, il y a : un tétraèdre 1234, dont les sommets, les arêtes et les faces sont des sommets, des arêtes et des faces de l'hexastigme; les points diagonaux et les points harmoniques qui appartiennent à ces six arêtes; les croisillons qui appartiennent à ces quatre faces; le point diagonal p_{56} qui est commun à l'espace 1234 et à l'arête opposée 56; une transversale $\theta(12\ 34\ 56)$.

§ 32. — Espaces cardinaux.

Rien ne nous empêche, pour arriver plus vite à notre but, de supposer un tétraèdre particulier (*fig.* 34) où le dernier point p_{56} soit le centre de moyenne position des quatre sommets, et où les points diagonaux qui sont les six arêtes en soient le milieu; alors les droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées sont des transversales de l'hexastigme et les centres de faces en sont les croisillons; alors aussi les points harmoniques des six arêtes *sont à l'infini.* Passant homographiquement de ce cas particulier au cas général, nous voyons que *les points harmoniques* de six arêtes quelconques de l'hexastigme *sont dans un même plan :* le transformé de celui de l'infini.

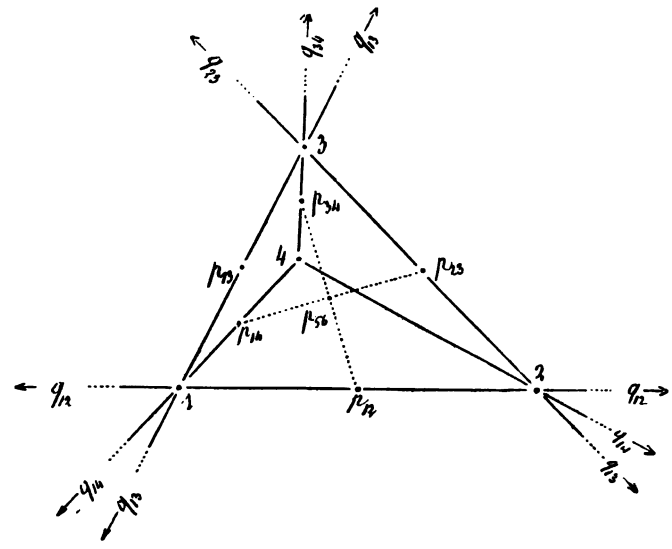
Adjoignant un cinquième sommet 5, nous avons affaire à dix arêtes, et leurs dix points harmoniques

$$q_{12},\ q_{13},\ q_{14},\ q_{15};\quad q_{23},\ q_{24},\ q_{25};\quad q_{34},\ q_{35};\quad q_{45}$$

sont dans un même espace. Il correspond un pareil espace à chacune des associations par cinq que les six sommets peuvent faire

entre eux; par conséquent ces espaces sont au nombre de six et *les quinze points harmoniques de l'hexastigme sont quatre par quatre les intersections de six espaces.* Il y a correspondance entre les six sommets et ces espaces, et l'on pourrait partir de ceux-ci

Fig. 34.



Tétraèdre auxiliaire.

pour construire l'hexastigme en suivant la marche inverse de celle que nous venons de parcourir. C'est le grand principe de dualité (*Traité élémentaire,* § 19) qui fait ici son entrée, associant à sa façon : chaque sommet avec l'espace qui contient les points harmoniques des dix arêtes qui joignent les cinq autres, le point harmonique d'une arête avec l'espace opposé à cette arête, la transversale qui coupe trois arêtes avec le plan qui contient leurs harmoniques, etc. De fait, l'on peut trouver une hypersurface du du second degré (1) par rapport à laquelle l'hexastigme est polaire de lui-même.

---

(1) Elle est imaginaire et a une équation de la forme

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0,$$

$X_1, X_2, \ldots$ étant des polynomes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4.

Sur le tétraèdre auxiliaire (*fig.* 34), on voit que les arêtes 13 et 24 sont parallèles au plan de la croix formée par les droites $p_{12}p_{34}$ et $p_{14}p_{23}$ qui se coupent en p_{56}. Il s'ensuit que, dans le cas général, les sept points

$$p_{56},\ p_{12},\ p_{34},\ p_{14},\ p_{23},\ p_{13},\ q_{24}$$

sont dans un même plan. L'espace que ce plan détermine avec le point p_{16} contient les points diagonaux de neuf arêtes

$$p_{12},\ p_{14},\ p_{16};\quad p_{32},\ p_{34},\ p_{36};\quad p_{52},\ p_{54},\ p_{56}$$

et les points harmoniques des six arêtes restantes

$$q_{13},\ q_{35},\ q_{51};\quad q_{24},\ q_{46},\ q_{62}.$$

De ceux-ci les trois premiers sont sur la face plane 135 de l'hexastigme et les trois autres sur la face opposée 246; et, comme il y a dix couples de faces planes, il existe dix espaces pareils au précédent. On les appelle *les espaces cardinaux;* conformément à une contraction déjà employée, nous désignerons par le symbole $c(135)$ celui qui contient les six points harmoniques ayant pour indices 13, 35, 51, 24, 46, 62; pour passer du symbole à ce développement, il faut commencer par ajouter la triade formée des trois chiffres manquants, puis doubler chaque chiffre, partager en tranches et restituer les lettres q :

$$c(135) = c(135\,246) = q_{13}q_{35}q_{51}q_{24}q_{46}q_{62}.$$

Outre ses *neuf points diagonaux* et ses *six points harmoniques,* chaque espace cardinal contient encore *six transversales* θ, dont les symboles se forment en associant par couples les chiffres de sa triade 135 avec ceux de la triade complémentaire 246; cela donne, pour l'espace cardinal qui nous sert d'exemple,

$$\theta(12\,34\,56),\quad \theta(14\,23\,56),\quad \theta(16\,25\,34),$$
$$\theta(12\,36\,45),\quad \theta(14\,25\,36),\quad \theta(16\,23\,45).$$

A eux dix les espaces cardinaux contiendraient donc soixante transversales; puisque le nombre de celles-ci est quinze, il s'ensuit que *quatre espaces cardinaux passent par chacune d'elles.*

Dans l'opposition dualistique de l'hexastigme avec lui-même, les espaces cardinaux sont corrélatifs des dix croisillons.

§ 33. — Seconde notation des transversales.

1. Comme chacune des quinze transversales rencontre trois des quinze arêtes, il est possible d'associer cinq des premières qui, ensemble, rencontrent toutes les secondes; telles sont, par exemple,

$$\theta(12\,34\,56),\quad \theta(13\,25\,46),\quad \theta(14\,26\,35),\quad \theta(15\,24\,36),\quad \theta(16\,23\,45).$$

Les associations jouissant de cette propriété sont au nombre de six, que nous désignerons par

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f$$

et chaque transversale entre dans deux d'entre elles.

Si nous convenons de *prendre la réunion des deux lettres* pour désigner cette transversale, nous aurons une notation plus brève reliée à la précédente par les quinze égalités qui occupent la gauche du Tableau suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll}
ab=\theta(12\ 34\ 56), & 12=\alpha(ab\ cd\ ef),\\
ac=\theta(13\ 25\ 46), & 13=\alpha(ac\ be\ df),\\
ad=\theta(14\ 26\ 35), & 14=\alpha(ad\ bf\ ce),\\
ae=\theta(15\ 24\ 36), & 15=\alpha(ae\ bd\ cf),\\
af=\theta(16\ 23\ 45), & 16=\alpha(af\ bc\ de),\\
\\
bc=\theta(16\ 24\ 35), & 23=\alpha(af\ bd\ ce),\\
bd=\theta(15\ 23\ 46), & 24=\alpha(ae\ bc\ df),\\
be=\theta(13\ 26\ 45), & 25=\alpha(ac\ bf\ de),\\
bf=\theta(14\ 25\ 36), & 26=\alpha(ad\ be\ cf),\\
\\
cd=\theta(12\ 36\ 45), & 34=\alpha(ab\ cf\ de),\\
ce=\theta(14\ 23\ 56), & 35=\alpha(ad\ bc\ ef),\\
cf=\theta(15\ 26\ 34), & 36=\alpha(ae\ bf\ cd),\\
\\
de=\theta(16\ 25\ 34), & 45=\alpha(af\ be\ cd),\\
df=\theta(13\ 24\ 56), & 46=\alpha(ac\ bd\ ef),\\
\\
ef=\theta(12\ 35\ 46). & 56=\alpha(ab\ ce\ df).
\end{array}\right.$$

Il est bon d'avoir aussi la contre-partie, et elle s'obtient aisément (1). Employant α comme signe fonctionnel pour indiquer, par exemple, que 12 est l'arête rencontrée par les trois transversales *ab*, *cd*, *ef*, on trouve les quinze égalités qui occupent la droite du même Tableau.

2. Deux transversales telles que *ab*, *cd*, dont les symboles contiennent des lettres différentes, se coupent en un point diagonal de l'hexastigme; elles ne se rencontrent pas quand il y a une lettre commune. Trois transversales représentées par des symboles tels que *ab cd ef*, où se trouvent les six lettres, passent par un même point diagonal. En somme, *les quinze transversales forment une famille de quinze droites passant trois par trois par quinze points, qui sont les points diagonaux.*

Six transversales situées dans un même espace cardinal sont représentées par des symboles tels que

$$ab,\ bc,\ ca \quad \text{et} \quad de.\ ef,\ fd$$

et, comme chacune des trois premières coupe chacune des trois autres, elles sont les génératrices d'une surface du second degré. Le symbole *abc def*, ou simplement *abc*, en continuant à appliquer le même principe d'abréviation, peut servir à distinguer des autres l'espace cardinal qui contient ces six transversales; cette remarque conduit à appliquer la notation littérale aux espaces cardinaux, et elle correspond comme ceci avec celle par chiffres :

$$\begin{aligned}
&C(abc) = C(145), && C(ace) = C(126),\\
&C(abd) = C(236). && C(acf) = C(124);\\
&C(abe) = C(146), && C(ade) = C(123),\\
&C(abf) = C(135); && C(adf) = C(125);\\
&C(acd) = C(156), && C(aef) = C(134).
\end{aligned}$$

3. Nous pouvons relever déjà dans l'hexastigme les propriétés suivantes; quelques-unes sont tellement simples qu'il serait puéril de les signaler pour elles-mêmes, mais on en verra de suite l'application.

(1) Comparez paragraphe 12, page 46.

1° Trois espaces cardinaux se coupent suivant une droite que déterminent deux points diagonaux, et il peut arriver deux choses. Ou les deux arêtes auxquelles ces points appartiennent ne se rencontrent pas : alors la droite est une transversale et contient un troisième point diagonal. Ou elles aboutissent à un même sommet; alors la droite contient un point harmonique; ainsi

$$c(123\,456),\quad c(124\,356),\quad c(125\,346)$$

se coupent sur la droite joignant p_{16} à p_{26}, laquelle passe aussi par p_{12}. Les droites qui se coupent dans le second cas sont au nombre de soixante, et nous les appellerons *les droites de Pascal de l'hexastigme.*

2° Les points diagonaux p_{12}, p_{13} sont respectivement sur les trois transversales *ab*, *cd*, *ef* et *df*, *bc*, *ae*; or *ab* et *df* ont en commun le point p_{56} et sont par conséquent dans un même plan; il en est de même de *cd* et *be*, qui ont en commun le point 45; de *ef* et *ac*, qui ont en commun le point 46; par conséquent *ces trois plans passent par une même droite de Pascal.*

3° Si l'on joint les cinq points p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16} deux à deux par des droites et trois à trois par des plans, on a dix droites, qui sont des droites de Pascal, et dix plans, que nous appellerons *des plans de Kirkman;* nous appellerons cet ensemble de dix droites et de dix plans une figure A; il y a, pour tout l'hexastigme, cinq autres figures pareilles B, C, D, E, F.

4° Les trois droites de Pascal qui joignent les points p_{12}, p_{13}, p_{14} passent par les soixante points de Kirkman. Celles qui joignent les points p_{12}, p_{23}, p_{31} sont sur une des faces de l'hexastigme, et ces vingt faces jouent ici le rôle de *vingt plans de Steiner.* On peut de même donner le nom de *droites de Plücker* aux quinze arêtes suivant lesquelles ces vingt plans se coupent par quatre. Trois plans de Kirkman mènent sans difficulté à *vingt points de Cayley* et à *quinze plans de Salmon.*

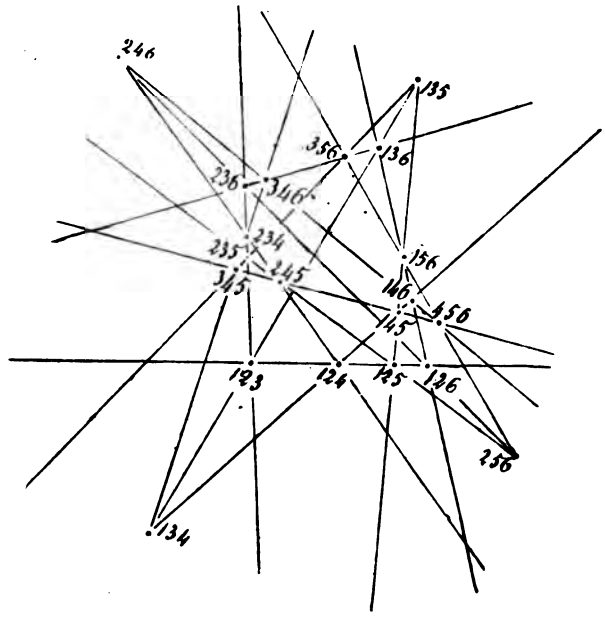
§ 34. — Section plane de l'hexastigme.

Dans toute section d'un hypercorps *par un plan,* les sommets et les arêtes sont hors de cause; les plans donnent des points et les espaces des droites. Nous avons donc ici vingt points et quinze

droites ; trois droites passent par chaque point et quatre points sont sur chaque droite. Une pareille section est représentée par la figure 35, qui n'est pas autre chose, à part la signification différente des éléments, que la figure 23 du Chapitre III.

Elle appartient à une intéressante famille de figures de Géométrie plane, sur lesquelles Schubert a attiré l'attention en leur donnant le nom de *configurations :* elles sont composées de droites

Fig. 35.



Section plane de l'hexastigme.

et de points satisfaisant à cette condition qu'il passe un même nombre de droites par tous les points, et qu'il y ait un même nombre de points sur toutes les droites. Ce rapprochement fournit un nouvel exemple de l'intervention du quatrième champ dans les affaires du deuxième.

La figure 23, page 66, Chapitre III, est aussi une *configuration de Schubert.*

§ 35. — Section spatiale de l'hexastigme.

1. Dans la section *par un espace*, il n'y a plus que les sommets de l'hypercorps qui ne soient pas en cause; les droites, les plans et les espaces donnent respectivement des points, des droites et des plans que nous appellerons *leurs traces*.

Si nous nous en tenons d'abord aux figures limitantes (§ 31), elles donnent quinze points, vingt droites et quinze plans dont le système est ainsi constitué :

Par un quelconque des quinze points, par exemple celui qui est la trace de l'arête 12, il passe quatre des vingt droites, qui sont les traces des faces 123, 124, 125 et 126, et sur chacune desquelles il y a encore deux des quinze points, traces des arêtes 13, 14, 15, 16; 23, 24, 25, 26. Ces huit derniers points sont les sommets de deux tétraèdres, desquels on peut dire : que les sommets correspondants sont sur quatre droites concourantes; que les arêtes correspondantes se rencontrent en six points situés dans un même plan; que les faces correspondantes se rencontrent suivant quatre droites situées dans un même plan.

La section de tout hexastigme peut se résoudre comme cela de quinze manières différentes. C'est l'analogue de la figure plane formée de deux triangles perspectifs, laquelle s'obtient de même en coupant par un plan la figure que forment dans l'espace cinq points dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan.

2. Tenons compte maintenant des *espaces cardinaux* (§ 32), et appelons *plans cardinaux* les plans qui sont leurs traces sur l'espace sécant. Puisque ceux-là se coupent par quatre sur quinze transversales, ceux-ci se coupent par quatre sur quinze points, qui sont les traces de ces transversales, et que nous appellerons *points principaux* (ne pouvant pas conserver le mot *tranversal* qui refuserait de s'unir avec le mot *point*). Le symbole

$$C(abc) \quad \text{ou} \quad C(abc.def)$$

désignera maintenant un plan cardinal et

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf;\quad cd,\ ce,\ cf;\quad de,\ df;\quad ef$$

désigneront des points principaux. Ceux de ces points qui sont

dans ce plan sont

$$ab,\ bc.\ ca,\ de,\ ef,\ fd$$

et, comme ils dérivent de six droites qui sont génératrices d'une surface du second degré, ils sont sur une conique.

Il nous est permis d'essayer de donner un corps à cette section spatiale, puisqu'elle n'est qu'une figure de Géométrie à trois dimensions.

Par rapport à l'arête 12, les dix espaces cardinaux se divisent en deux groupes. Ceux du premier, au nombre de quatre, la rencontrent en son point harmonique q_{12}. Les six du second la rencontrent en son point diagonal p_{12}, par lequel passent aussi les trois transversales *ab*, *cd*, *ef*; deux des six espaces contiennent *cd* et *ef*, deux *ef* et *ab*, deux *ab* et *cd*. Chacune des douze autres transversales est dans deux espaces cardinaux du premier groupe et dans deux du second.

Dans l'espace sécant, deux plans cardinaux passent par chacun des côtés du triangle qui a pour sommets *ab*, *cd*, *ef* et ces six plans forment une figure F ayant, comme le parallélépipède classique, six faces planes, douze arêtes, huit sommets; elle devient un parallélépipède quand les transversales *ab*, *cd*, *ef* sont parallèles à l'espace sécant; sans doute elle peut aussi devenir un cube. Les quatre plans cardinaux restants forment un tétraèdre T. Quant aux douze points principaux restants, il y en a un sur chacune des douze arêtes de la figure F; ils sont aussi par deux sur les six arêtes du tétraèdre T, les deux qui sont sur deux arêtes opposées de F étant sur une même arête de T. Vous pouvez vous faire une idée de cet ensemble de la manière suivante :

Construisez avec du fil de fer ou des réglettes de bois un cube PR′QS′P′RQ′S. Marquez-y, comme l'indique la figure 36, des points

$$ac,\ bd;\quad ad,\ bc;\quad ae,\ fb;\quad af,\ be;\quad ce,\ df;\quad de,\ cf$$

respectivement sur les arêtes

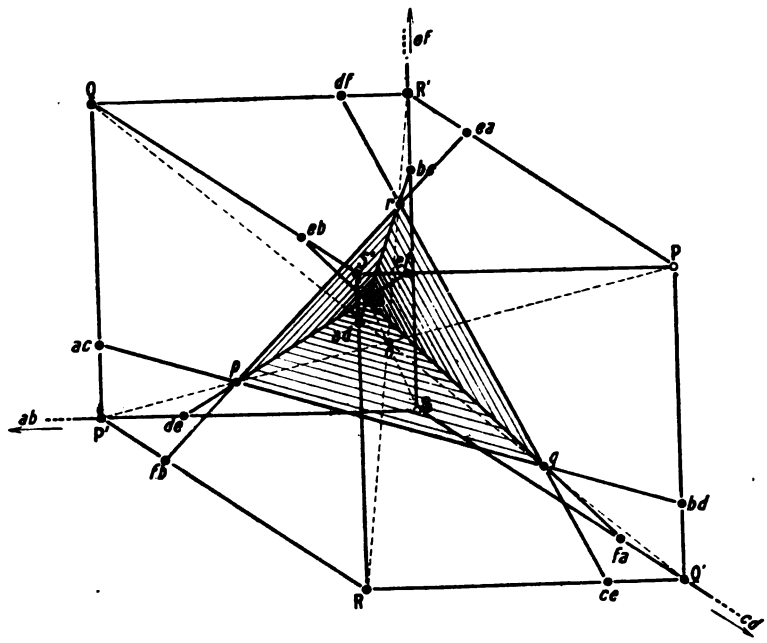
P′Q, Q′P; S′R, R′S; PR′, RP′; SQ′, QS′; RQ′, QR′; SP′, PS′

et à égales distances des sommets P′, Q′, R′, S′ (1).

(1) Ces distances ne sont pas égales *sur la figure* 35 parce qu'elles sont inégalement

Joignez par des fils les points marqués sur des arêtes opposées; ces fils passeront trois par trois en des points p, q, r, s, par lesquels passent aussi les diagonales du cube : ce sont les sommets du tétraèdre T. Alors les faces du cube et celles du tétraèdre

Fig. 36.



Section spatiale de l'hexastigme.

vont vers dix plans cardinaux; les points marqués sur les arêtes du premier sont douze des points principaux, et les trois autres

$$ab;\quad cd;\quad ef$$

sont à l'infini respectivement sur

SP', S'P, RQ', R'Q; SQ', S'Q, RP', R'P; SR', S'R, PQ', P'Q.

3. Comme conséquence de notre conception de l'étendue quadri-

déformées par la projection. Elles ne devraient pas être égales *sur le solide* si l'on prenait un parallélépipède au lieu d'un cube.

dimensionnelle, il est établi, dit Richmond, qu'*il existe dans l'espace ordinaire des familles de quinze points possédant les propriétés suivantes :*

1° Aux quinze points l'on peut associer, chacun à chacun, quinze couples formés avec *six* symboles

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

tels que certaines correspondances entre certaines associations des quinze points soient accusées par des correspondances entre les six symboles; qu'en particulier l'on puisse, en interchangeant ceux-ci, modifier les couples sans attenter à la vérité de certaines propriétés concernant les points auxquels ils sont associés. Convenons d'appeler les quinze points *points principaux,* et de leur associer *chacun à chacun* les couples

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf;\quad cd,\ ce,\ cf;\quad de,\ df;\quad ef.$$

2° Six points tels que

$$ab,\quad bc,\quad ca,\quad de,\quad ef,\quad fd$$

sont dans un même plan et sont sur une section conique; il y a dix pareils plans, appelés *plans cardinaux,* dont quatre passent par chaque point principal.

3° Le point d'intersection de trois plans cardinaux est, ou un point principal, par lequel passe un quatrième plan cardinal, ou un membre d'un groupe de soixante points, appelés *points de Pascal.* La ligne d'intersection de deux plans cardinaux quelconques contient deux points principaux et quatre points de Pascal; par exemple, SP′ de la figure 36 passe par les deux points principaux *ab*, *de* et par quatre points de Pascal qui sont : S, P′, l'intersection avec *pqr*, celle avec *qrs*.

Par chaque point de Pascal, par exemple S, il passe trois droites SP′, SQ′, SR′, intersections de trois plans cardinaux, lesquelles joignent *ab* et *de*, *bc* et *ef*, *cd* et *fa*. Chaque point de Pascal peut être considéré comme l'intersection de droites joignant les sommets opposés d'un hexagone gauche dont les sommets sont *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*; ils correspondent aux soixante permutations (§ 12) des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

4° Les points de Pascal forment six groupes de dix points ou décades, et les dix membres de chaque décade sont les sommets d'une figure A formée par cinq plans. Dans la figure 36, les quatre points P, Q, R, S et les dix points où les droites

$$PS,\quad QS,\quad RS,\quad QR,\quad RP,\quad PQ$$

rencontrent respectivement

$$ps,\quad qs,\quad rs,\quad qr,\quad rp,\quad pq$$

forment une de ces décades; ces six derniers points sont dans un plan qui, avec les quatre faces du tétraèdre PQRS, fait les cinq plans de la figure A.

5° Les points de Pascal sont aussi par trois sur vingt droites et par douze sur quinze plans qui forment la figure décrite paragraphe 34. Dans le cas particulier du cube (*fig.* 36), les quinze plans sont : les six plans qui passent par deux arêtes opposées; quatre qui passent par les points principaux des arêtes se rencontrent en P, Q, R, S et forment un tétraèdre dont les sommets sont sur PP′, QQ′, RR′, SS′; quatre qui forment un second tétraèdre dont les sommets sont aussi sur ces lignes et dont les faces sont parallèles à celles du précédent; enfin le plan de l'infini. Les douze points de Pascal qui sont sur le dernier sont les intersections des faces de *pqrs* avec les trois droites de l'infini des faces du cube.

6° Chacune des six décades de points qui se sont montrées dans 4° est formée par les traces des arêtes d'une figure que définissent cinq points diagonaux de l'hexastigme, tels que p_{12}, p_{13}, p_{14} p_{15}, p_{16}; les faces de ces six figures se coupent par trois suivant des points tels que q_{56}, q_{64}, q_{45}, et leurs espaces se coupent par deux suivant les plans similaires à ceux qui contiennent q_{34}, q_{35}, q_{36}, q_{45}, q_{46}, q_{56}. Mais nous avons vu que les points harmoniques sont déterminés complètement par les intersections de six espaces; donc, revenant à notre section spatiale, nous inférons qu'il existe une certaine figure de six plans (*hexaèdre*) par chaque arête de laquelle passent deux plans appartenant aux dix figures A, et par chacun des sommets de laquelle passent trois de leurs arêtes.

§ 36. — La figure de six espaces.

On a vu, paragraphe 32, que l'hexastigme peut se construire sur six espaces au lieu de six points. Nous avons besoin de le connaître aussi sous cet autre aspect, qu'il prendra dans diverses parties des prochains paragraphes, et où des

espaces, plans, droites, points

correspondent aux

points, droites, plans, espaces

du premier. Nous désignerons les deux figures respectivement par $\mathbf{H}_p$ (hexastigme de points) et $\mathbf{H}_e$ (hexastigme d'espaces).

Admettons donc maintenant que les numéros

1, 2, 3, 4, 5, 6

désignent des espaces. Par leurs intersections deux à deux, trois à trois et quatre à quatre, ces espaces donnent (1) quinze plans :

12, 13, 14, 15, 16; 23, ..., 56;

vingt droites formant dix couples :

123, 456; 124, 356, ...;

quinze points :

3456, 2456, 2356, ..., 1234.

Nous attribuerons à ces quatre sortes d'éléments la qualification commune de fondamentaux; à leur tour, ils en engendrent d'autres, parmi lesquels nous avons à distinguer les suivants.

I. — Espaces diagonaux.

Les quinze points diagonaux du paragraphe 31 sont remplacés par des *espaces diagonaux*, tels que p_{12}, celui-ci étant déterminé par le plan qui est l'intersection des deux espaces fondamentaux 1, 2 et le point qui est celle des quatre autres espaces 3, 4, 5, 6.

---

(1) Comparez paragraphe 31, page 125.

II. — Plans transversaux.

Les quinze transversales dont le type était θ (12, 34, 56) deviennent des *plans transversaux* qui seront désignés, soit de cette manière, soit par les quinze couples de lettres

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad \ldots,\quad ef,$$

les deux notations étant liées entre elles par les formules page 130. M. Schoute a eu l'idée ingénieuse de disposer ces couples sous la forme d'un déterminant symétrique où chacun d'eux entre deux fois :

$$\begin{array}{cccccc} * & ab & ac & ad & ae & af \\ ba & * & bc & bd & be & bf \\ ca & cb & * & cd & ce & cf \\ da & db & dc & * & de & df \\ ea & eb & ec & ed & * & ef \\ fa & fb & fc & fd & fe & * \end{array}$$

et où l'on reconnaît aisément les propriétés suivantes :

α. Deux plans ont pour intersection un point ou une droite, suivant que leurs couples représentatifs ont, ou non, une lettre commune, c'est-à-dire sont ou non sur la même ligne ou la même colonne.

β. Si l'on associe ensemble deux lignes ou colonnes quelconques, en supprimant dans chacune le terme qui correspond à une case vide de l'autre, et qui est le même dans les deux, on a huit plans tels que

$$\begin{array}{cccc} ac, & ad, & ae, & af, \\ bc, & bd, & be, & bf, \end{array}$$

dont chacun coupe suivant un point un quelconque de ceux qui sont sur la même horizontale ou la même verticale que lui, et suivant une droite un quelconque des autres. C'est ce que M. Schoute appelle *un double-quatre de plans,* à raison de l'analogie de cette propriété avec celle du *double-six de droites* de Schläfli. Il y a quinze double-quatre dans $\mathbf{H}_6$. Les quatre points d'intersection des plans qui se trouvent l'un sous l'autre quand on a pris deux lignes du déterminant, l'un à côté de l'autre quand

on a pris deux colonnes, sont dans un même plan, qui est celui *ab* mis de côté.

γ. Les lignes et colonnes composent six groupes de cinq plans (ou six *quines*) jouissant de cette remarquable propriété que chaque plan d'un quine joue, par rapport au double-quatre dans lequel entrent les quatre autres, le même rôle que nous avons vu jouer à *ab* par rapport au premier double-quatre.

δ. Toute droite rencontrant quatre plans d'un quine rencontre aussi le cinquième; nous verrons plus loin que ces droites sont en nombre infini et forment une hypersurface du troisième degré, qui est la même pour les six quines.

ε. Un espace quelconque coupe chacun des six quines suivant cinq droites, qui admettent deux transversales communes; cela fait six couples de droites, qui sont les éléments opposés d'un double-six de Schläfli.

III. — Points cardinaux.

Un terne de plans transversaux tel que *ab*, *cd*, *ef*, c'est-à-dire où les plans se coupent deux à deux suivant une droite, est contenu dans un espace diagonal 12; il y en a quinze, un dans chacun de ces espaces.

Six plans transversaux *ab*, *bc*, *ca*; *de*, *ef*, *fd* formant deux ternes tels que chaque plan de l'un coupe chaque plan de l'autre suivant une droite, passent par un même point, que nous désignerons par

$$C(abc\ def), \quad \text{ou, plus simplement,} \quad C(abc).$$

Il y a dix points pareils, qui sont les *dix points cardinaux* correspondant aux espaces cardinaux du paragraphe **32**; chaque plan transversal en contient quatre.

Il passe par chaque point cardinal neuf espaces diagonaux.

§ 37. — Projection plane.

Nous pouvons maintenant marcher rapidement.

Si vous projetez sur un plan une section spatiale de la figure qui fait l'objet du paragraphe précédent, vous avez l'hexagramme

de Pascal avec son riche cortège de théorèmes. Si vous projetez la section spatiale qui a été étudiée dans le paragraphe 33, vous avez l'hexagramme de Brianchon, avec la masse de théorèmes qui sont corrélatifs des précédents. Avoir l'une ou l'autre forme est à peu près indifférent à la Géométrie moderne, tant la transition de l'une à l'autre lui est facile, au moins lorsqu'il ne s'agit que de propriétés descriptives. Quoi qu'il en soit, vous êtes amené à dire, renouvelant pour le plan l'énoncé déjà formulé pour l'espace à la fin du paragraphe 35 :

Une conséquence nécessaire de notre conception de l'étendue est qu'il existe dans le plan des familles de quinze droites possédant les propriétés suivantes : Les droites peuvent être associées avec un système de quinze symboles

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\ bc,\ bd,\ \ldots,\ ef$$

formant tous les accouplements possibles de six lettres a, b, c, d, e, f; elles peuvent être désignées au moyen de ces symboles; toute proposition les concernant demeure inaltérée quand on interchange les dix lettres d'une manière quelconque; toute symétrie ou correspondance de divers groupements faits avec les droites est accusée par leurs symboles représentatifs. La figure qu'elles forment, avec les nombreuses propriétés que Veronese lui a reconnues, est simplement un cas particulier de la figure tridimensionnelle de dix plans cardinaux (§ 35), de même que celle-ci est un cas particulier de la figure quadridimensionnelle de six points (§ 31).

§ 38. — L'hypersurface de Segre.

On a vu l'étroite relation qu'il y a entre l'hexastigme, la surface du troisième degré et l'hexagramme : *les quinze droites qui restent sur la seconde quand on a retiré un double-six ne sont autre chose qu'une section spatiale des plans transversaux du premier, et ont pour projection sur un plan les droites fondamentales du troisième.* Cette propriété de la *surface* du troisième degré est un cas particulier de celles que nous offre l'*hypersurface* du même degré, variété des plus intéressantes, découverte et étudiée par Segre, étudiée aussi, géométriquement ou analytiquement, par

Castelnuovo, Schoute et d'autres (1). On la désigne ordinairement par V_3.

Analytiquement, elle est définie par les équations canoniques

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \end{cases}$$

où x_1, x_2, désignent des polynomes du premier degré à quatre coordonnées. Ces équations étant homogènes l'une et l'autre, c'est comme si elles n'avaient que cinq variables; étant au nombre de deux, elles équivalent à une seule entre les quatre coordonnées (2). Elles représentent donc une hypersurface, laquelle est du troisième degré.

En vertu de la seconde, la première équation peut recevoir une quelconque des dix formes

$$(2)\qquad \begin{cases} (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1) = -(x_4+x_5)(x_5+x_6)(x_6+x_4) \\ (x_1+x_2)(x_2+x_4)(x_4+x_1) = -(x_3+x_5)(x_5+x_6)(x_6+x_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

les huit qui ne sont pas écrites étant constituées de manière analogue, savoir : les indices des premiers membres formés avec les trois couples que fournissent les chiffres de ces dix triades

$$123,\ 124,\ 125,\ 126;\quad 134,\ 135,\ 136;\quad 145,\ 146;\quad 156$$

et ceux des seconds avec les trois couples que fournissent les chiffres complémentaires.

---

(1) SEGRE, *Sulle varieta cubiche dello spazio a quatro dimensioni* (*Mémoires de Turin*, t. 1888).

SEGRE, *Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni* (*Rendiconti di Palermo*, vol. II).

CASTELNUOVO, *Sulle congruenze del terzo ordine delle spazio a quattro dimensioni* (*Atti dell' Istituto veneto*, 1888).

CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria dello retta nello spazio a quattro dimensioni* (*Atti dell' Istituto veneto*, 1891-1892).

SCHOUTE, *Considerations in reference to a configuration of Segre* (*Akad. v. Vettenschappen to Amsterdam*, 1902).

(2) Comme les *coordonnées* proprement dites n'apparaissent nulle part, nous emploierons ce mot pour désigner les *six* fonctions x : ce sera ce que le paragraphe 4 appelle *coordonnées surabondantes*.

Il en résulte les propositions suivantes :

1° En associant successivement à chacune de ces formes la condition d'identité, on voit que les équations canoniques sont satisfaites si l'on pose un quelconque de ces *quinze ternes d'équations*

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1+x_2=0, & x_3+x_4=0, & x_5+x_6=0; \\ x_1+x_3=0, & x_2+x_5=0, & x_4+x_6=0; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ce sont *autant de plans* que les indices des x conduisent à représenter par les quinze symboles

$$12\,34\,56, \quad 13\,25\,46, \quad \dots.$$

et, en se reportant aux formules (3), page 3, on les représentera aussi par

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad \dots;\quad ef.$$

Ils ne sont pas autre chose que les *plans transversaux* de l'hexastigme $\mathbf{H}_6$ (1).

2° Il y a dans V_3 toutes les droites données par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda(x_1+x_2)=-\mu(x_5+x_6), \\ \mu(x_1+x_3)=-\nu(x_4+x_6), \\ \nu(x_2+x_3)=-\lambda(x_4+x_5), \end{cases}$$

λ, μ, ν désignant trois variables qui équivalent à deux paramètres arbitraires. Ces droites rencontrent, toutes, cinq des plans ci-dessus, savoir

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af.$$

Cela est évident, par les équations elles-mêmes, pour le premier, le second et le cinquième; en ajoutant membre à membre ces équations, une première fois multipliées par 1, 1, 1, une seconde fois par ν, λ, μ, et tenant compte de la relation d'identité, il vient

---

(1) Ces quinze plans constituent l'intersection complète de V_3 avec cette autre hypersurface

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_3^3}+\frac{1}{x_4^3}+\frac{1}{x_5^3}+\frac{1}{x_6^3}=0.$$

ces deux autres

$$(4')\qquad \begin{cases} \lambda(x_1+x_5)+\mu(x_2+x_4)+\nu(x_3+x_6)=0, \\ \mu\nu(x_1+x_4)+\nu\lambda(x_3+x_5)+\lambda\mu(x_2+x_6)=0, \end{cases}$$

qui le montrent pour le troisième et pour le quatrième.

Des équations semblables à celles en λ, μ, ν peuvent s'obtenir de cinq autres manières, d'où il suit qu'*il existe sur* V_3 *six systèmes de* ∞^2 *droites;* il correspond à chacun un groupe de cinq plans transversaux appartenant à V_3; il passe une droite de chaque système par chaque point *ordinaire k* de V_3; ces six droites, qui sont des génératrices d'un cône du second degré situé dans l'espace tangent en k, sont celles qui rencontrent au même point chacun des quinze espaces diagonaux de H_e et un des trois plans transversaux qu'il contient. Un sens géométrique plus précis est ainsi attribué aux symboles a, b, c, d, e, f : les droites représentées par un couple dans lequel entre la lettre a rencontrent les cinq plans transversaux d'un même groupe et l'association du couple ab avec le plan transversal 12 34 56 signifie que ce plan est rencontré par toutes les droites des types a et b;

3° Les équations (3), qui représentent les quinze plans transversaux, montrent que ces plans passent six par six en dix points qui ont chacun trois coordonnées égales à $+1$ et trois égales à -1. Par exemple les six plans

$$ab,\ cd,\ ce,\ de,\ af,\ bf$$

passent par le point

$$x_1=+1,\quad x_2=-1,\quad x_3=+1,$$
$$x_4=-1,\quad x_5=+1,\quad x_6=-1.$$

Ces dix points sont des points singuliers de l'hypersurface, car il est clair que l'espace tangent ne saurait y être unique. Ce sont aussi les dix *points cardinaux* de H_e, corrélatifs des espaces cardinaux de H_p. Ils sont par six sur chacun des quinze plans transversaux. Neuf plans diagonaux passent par chacun d'eux.

§ 39. — La surface de Kummer.

1. La section de V_3 par l'espace qui lui est tangent en un point ordinaire k est une surface du troisième degré S ayant un point conique en k. Les quinze plans transversaux de V_3 donnent dans la section quinze droites situées sur S; les six droites de V_3 qui passent par k demeurent, dans la section, des droites pouvant toujours être désignées par les lettres a, b, c, d, e, f et chacune des quinze premières coupe deux d'entre elles suivant le schéma que définissent les couples ab, ac, ... Si l'on projette ce système sur un plan, les unes coupent le plan en six points d'une conique, et les autres donnent les quinze droites de l'hexagramme de Pascal. La projection de la ligne d'intersection des plans $x_1+x_2=0$, $x_1+x_3=0$, ..., $x_1+x_6=0$ contient encore les intersections de ab avec de, bc avec ef, cd avec fa, et est une droite de Pascal.

2. La réciproque dualistique de V_3 est une hypersurface de la troisième classe et, étant tenu compte de ce que V_3 a dix points singuliers, du quatrième degré (1); nous la désignerons par V_4. Elle est associée avec l'hexastigme de points H_p de la même manière que V_3, qui est du troisième degré et de la quatrième classe, l'est avec celui d'espaces H_e. Elle contient comme ligne double chacune des quinze transversales de H_p, et chacun des dix espaces cardinaux du même H_p lui est un espace tangent singulier, c'est-à-dire la coupe suivant une surface du second degré double.

La section de V_4 par un espace est donc une surface du quatrième degré qui a quinze points doubles et dix plans tangents singuliers : ce sont les points principaux et les plans cardinaux de la section faite par le même espace dans H_p. *Les projections sur un plan des quinze points singuliers d'une surface du quatrième degré forment donc une famille de quinze droites possédant les propriétés de l'hexagramme de Brianchon.*

---

(1) Ce calcul de réciprocation n'est pas des plus simples. On le trouvera dans le Mémoire de Castelnuovo, *Atti dell' Istituto veneto*, 1891. — *Voir* aussi : DRAGONI, *Sulla varieta cubica di* S_4 *dotata di dieci punti doppii* (*Giornale di Battaglini*, t. XL, 1902, p. 255).

Si l'espace sécant touche V_4 en un point ordinaire k, la surface du quatrième degré qui est son intersection avec V_4 a encore un point singulier en k, ce qui en fait *seize*. C'est la *surface de Kummer*, qui a été extrêmement étudiée ; elle est à la fois du quatrième degré et de la quatrième classe; elle a, dans le cas considéré ici, seize points singuliers; elle a aussi seize plans tangents singuliers (c'est-à-dire la touchant suivant une conique) : six de ces plans passant par chacun de ces points et six de ces points se trouvent sur chacun de ces plans (1). *Quinze quelconques des seize points singuliers ont toutes les propriétés reconnues pour les quinze premiers, et leurs projections sur un plan forment une famille de seize droites dont quinze quelconques possèdent les propriétés de l'hexagramme de Brianchon.*

Voilà donc, faisant suite à ce qui a été dit à la fin du Chapitre précédent (p. 124), de nouvelles familles de quinze points ou de quinze droites par corrélation, qui jouissent des propriétés reconnues par Véronèse.

§ 40. — Résumé et conclusion des Chapitres III, IV et V.

Voici le chemin qu'avec le lecteur nous avons parcouru dans ces trois Chapitres.

I. L'hexagramme de Pascal, formé de quinze droites se rencontrant deux à deux sur six points d'une conique, — ou, indifféremment, l'hexagramme de Brianchon, formé des quinze points d'intersection de six tangentes à une conique, — présente, quand on le considère comme une chose purement bidimensionnelle, une complication et une diffusion un peu déconcertantes pour l'esprit. Mais il est en relation immédiate avec une certaine forme de la *surface du troisième degré* de la Géométrie à trois dimensions, celle qui

(1) Salmon, dans son *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, ne consacre pas plus de quatre pages à la surface de Kummer. On peut voir de préférence : CAPORALI, *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer* (*Acc. dei Lincei*, 1877-1878). — ROHN, *Die verschiedene Gestalten der Kummer'schen Fläche* (*Math. Annalen*, t. XVIII, 1881, p. 99-160). — KUMMER, *Monatsberichte* de 1863, p. 539; 1866, p. 216-220; 1872, p. 474-483.

a un point nodal. La relation consiste en ce que la surface du troisième degré ainsi particularisée contient *vingt et une* droites, dont six sont les génératrices d'un cône du second degré ayant pour sommet le point nodal et sur lequel on peut poser la conique de l'hexagramme, tandis que les quinze autres droites sont dans les quinze plans joignant les premières deux à deux. Toutes les propriétés de l'hexagramme sont contenues dans cette figure ; elles sont facilement reconnaissables sous la forme tridimensionnelle, et elles y ont plus de cohésion, d'étendue, de profondeur, sans toutefois y trouver encore ce cachet de naturel et de simplicité, si apprécié du géomètre.

II. Si, de la surface du troisième degré particularisée par un point nodal, on passe à la surface générale, le nombre des droites en faisant partie se trouve porté de 21 à 27. On peut faire avec celles-ci, de diverses manières, un lot de quinze droites qui, projetées d'un point de la surface situé sur un de ses dix triangles, possèdent aussi les propriétés des quinze droites de l'hexagramme. Nous sommes en présence d'une nouvelle famille. Ce ne sont plus quinze droites joignant deux à deux six points d'une conique; ce sont quinze droites prises à volonté parmi *les vingt-huit doubles tangentes d'une courbe plane du quatrième degré formée de quatre ovales sans points singuliers.*

III. La figure à trois dimensions se trouve à son tour dans une figure quadridimensionnelle, qui, elle, est aussi simple que naturelle, celle de six points : *elle en est la section par un espace.* Ce n'est donc pas dans le troisième, mais dans le quatrième champ, ce n'est pas dans l'espace, mais dans l'étendue, que vont se nouer les tronçons épars montrés par le Chapitre III, et qu'il faut chercher la cause des multiples propriétés de l'hexagramme. M. Richmond fait cette observation que la figure de *quatre points dans le plan* fournit à la Géométrie de *la droite* (le champ inférieur d'un degré) une notion tout à fait fondamentale, celle du *rapport anharmonique;* que la figure de *cinq points dans l'espace* fournit à la Géométrie *du plan* une notion également capitale, celle de *deux triangles homologiques;* qu'enfin la figure de *six points dans l'étendue* fournit aux champs inférieurs la notion de l'hexa-

gramme, assurément moins essentielle, mais que Pascal jugeait assez importante pour la mettre à la base de la théorie des coniques.

IV. Nous avons d'abord cherché à masser et à synthétiser les propriétés de l'hexagramme en nous élevant du plan dans l'espace, et nous avons trouvé avantageux, au lieu d'opérer dans l'*espace général*, multiplicité à trois dimensions, de nous confiner sur la *surface du troisième degré*, qui n'en a que deux. Puis, nous avons synthétisé à la fois la figure plane et la figure de l'espace dans le champ supérieur : l'étendue. Là nous avons obtenu la réalisation de ce que nous cherchions; et là encore nous avons trouvé avantage à ne pas rester dans l'*étendue générale*, multiplicité à quatre dimensions, mais à supprimer une de ces dimensions en nous renfermant dans l'*hypersurface du troisième degré*. En d'autres termes, de même que nous avions *courbé le plan primitif et l'avions modelé sur une surface du troisième degré*, opération qui n'en conservait que les vingt-sept droites utiles et laissait les autres dehors, de même nous avons *courbé et modelé notre espace sur une hypersurface du troisième degré*, pour en expulser l'encombrante multitude des droites et des plans ne servant à rien.

Alors sont nées sous nos yeux de nouvelles familles planes de quinze droites, partageant avec celle de l'hexagramme toutes ses propriétés et ayant avec elle une origine commune dans l'étendue. Avec curiosité, nous avons vu qu'elles *n'existent pas isolément*, comme leur aînée de 1640, mais se réunissent plusieurs ensemble pour former des *groupes de permutations circulaires* : il a été noté un pareil groupe comprenant seize membres, parmi lesquels on peut prendre à volonté une permutation quelconque de quinze; un second est de *trente-six* membres, et il n'en manque pas d'autres.

Voilà comment il est répondu aux deux questions qui se sont posées dans le paragraphe 19.

CHAPITRE VI.

LES HYPERSURFACES DU SECOND DEGRÉ.

§ 41. — Principes de la discussion de l'équation générale du second degré entre quatre coordonnées.

1. On appelle *hyperquadrique,* et nous désignerons abréviativement par φ, le *lieu des points dont les quatre coordonnées satisfont à une équation du second degré.* Il pourra nous arriver de remplacer ce mot encombrant par le mot plus simple de *quadrique,* lorsqu'il n'y aura pas danger de confusion entre l'*hypersurface* et la *surface,* entre l'être à trois dimensions et celui à deux.

La forme la plus générale de l'équation du second degré, en coordonnées homogènes $\frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}, \frac{x_4}{x_5}$ (§ 2), est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x_i) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{15}x_1x_5 \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{25}x_2x_5 \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 + a_{34}x_3x_4 + a_{35}x_3x_5 \\ & + a_{41}x_4x_1 + a_{42}x_4x_2 + a_{43}x_4x_3 + a_{44}x_4^2 + a_{45}x_4x_5 \\ & + a_{51}x_5x_1 + a_{52}x_5x_2 + a_{53}x_5x_3 + a_{54}x_5x_4 + a_{55}x_5^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Le nombre des termes de φ est $\frac{1}{2}.5.6 = 15$, ce qui fait qu'il y a quatorze paramètres et que l'on peut, en thèse générale, faire passer une hyperquadrique par quatorze points de l'étendue.

Pour la symétrie, chaque terme ne contenant pas un carré a été écrit deux fois : une première fois, par exemple, sous la forme $a_{12}x_1x_2$ et une seconde fois sous la forme $a_{21}x_2x_1$, étant connu que $a_{12} = a_{21}$, c'est-à-dire que l'interversion des chiffres 1 et 2 ne change pas plus le coefficient a_{12} qu'elle ne change le produit

$x_1 x_2$. C'est donc comme s'il y avait $2a_{12}x_1x_2$, et ce n'est *qu'en apparence* que le nombre des termes est $5.5 = 25$ (1).

Si l'on désigne par X_1 le multiplicateur de x_1 dans la première ligne, par X_2 celui de x_2 dans la seconde, etc., l'équation s'écrit

$$(2) \qquad \varphi(x_i) = X_1x_1 + X_2x_2 + \ldots + X_5x_5 = 0.$$

2. Le théorème suivant est la pierre angulaire de la théorie des hyperquadriques : *Si*

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5, \quad \text{ou, plus brièvement,} \quad y_i$$

sont les coordonnées d'un point quelconque p, et Y *ce que deviennent les polynomes* X *quand on y remplace x par y, l'équation*

$$(3) \qquad Y_1x_1 + Y_2x_2 + \ldots + Y_5x_5 = 0$$

représente un espace E *jouissant de cette propriété que, si l'on joint par une droite un quelconque de ses points au point p, cette droite est divisée harmoniquement par les deux points en lesquels elle coupe l'hyperquadrique.*

Soient en effet

$$y_i,\quad y'_i,\quad y_i + k_1y'_i,\quad y_i + k_2y'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

quatre points en ligne droite. Les deux derniers seront sur l'hyperquadrique si l'on prend pour k_1 et k_2 les deux racines de

---

(1) Bibliographie de ce Chapitre :

SEGRE, *Studio sulle quadriche in un spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (*Mém. de l'Acad. des Sci. de Turin*, 2e série, t. XXXVI, 1884, p. 1-86).

SEGRE, *Étude des différentes surfaces du troisième ordre à conique double ou cuspidale considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions* (*Math. Annalen*, t. XXIV, 1882, p. 313-444).

KLEIN, *Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale* (*Math. Annalen*, t. XXVIII, 1887).

HENSEL, *Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der oberflächen zweiter Ordnung* (*Journ. de Crelle*, vol. 113, 1894, p. 303).

WYTHOFF, *The Classification of quadrics in n-dimensional space* (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1899, p. 162-191).

SOMMER, *Focaleigenschaften quadratischer Mannifaltigkeiten im vierdimensionalen Raume* (*Math. Annalen*, t. LIII, 1900).

l'équation du second degré en k

$$\varphi(y_i + ky'_i) = 0,$$

et ils seront conjugués harmoniques des deux premiers si $k_1 = -k_2$, c'est-à-dire si le coefficient du terme du premier degré de cette équation est nul. Or ce coefficient est

$$Y_1 y'_1 + Y_2 y'_2 + \ldots + Y_5 y'_5,$$

ce qui donne l'équation (3) en supposant que les y_i sont les coordonnées d'un point fixe et que les y'_i sont les coordonnées courantes.

3. On dit d'un point p et d'un espace E ayant entre eux la relation ainsi définie que p est le pôle de E et que E est l'espace polaire de p.

Pour que l'espace polaire du point p soit déterminé, il faut qu'un au moins des coefficients Y ne soit pas nul. Lorsqu'un point p est sur l'espace polaire d'un autre point q, réciproquement q est sur l'espace polaire de p; alors le point p et le point q sont dits *conjugués l'un de l'autre*. Lorsqu'un point q est sur son propre espace polaire E, il est sur l'hyperquadrique; en lui se réunissent les deux points d'intersection de la droite qui le joint à un point quelconque de E, et celui-ci s'appelle *l'espace tangent à l'hyperquadrique* au point p.

Quand des points sont sur une même droite ou sur un même plan, leurs espaces polaires passent par un même plan ou par une même droite; cette droite et ce plan sont dits *polaires l'un de l'autre*.

4. Cherchons les conditions pour qu'une droite D *se trouve sur l'hyperquadrique*. Soient

$$y_i, \quad y'_i, \quad y_i + ky'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

trois quelconques de ses points; on doit avoir, quel que soit k,

$$\varphi(y_i) = 0, \qquad \varphi(y'_i) = 0, \qquad \varphi(y_i + ky'_i) = 0,$$

la troisième équation pouvant s'écrire, en vertu des deux pre-

mières,

$$Y_1 y'_1 + Y_2 y'_2 + \ldots + Y_5 y'_5 = 0.$$

Cela fait trois équations de condition, et elles expriment :

1° Que deux points de D doivent être sur l'hyperquadrique;

2° Qu'ils doivent être conjugués l'un de l'autre. Pour achever de préciser ces deux points, il faut ajouter deux équations (une pour chacun) qui sont arbitraires, puisque chacun d'eux peut être pris où l'on voudra sur D. On a alors $3 + 2 = 5$ équations entre les coordonnées y_i, y'_i et, comme celles-ci sont au nombre de huit, le système est *trois fois indéterminé*. En d'autres termes, il y a sur l'hyperquadrique un ∞^3 de droites; elles peuvent être réelles ou imaginaires; il en passe trois par chaque point.

Si l'on fait le même calcul pour un plan, on trouve pour le déterminer : 1° trois équations exprimant que trois de ses points sont sur l'hyperquadrique; 2° trois autres exprimant qu'ils sont conjugués deux à deux; 3° deux autres pour chacun des trois points; 4° deux autres pour chacun des deux autres points. Cela fait douze équations en tout, et, comme douze coordonnées sont en jeu, il s'ensuit qu'il n'y a pas de systèmes plans sur l'hyperquadrique générale.

5. Tout espace

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_5 x_5 = 0 \tag{4}$$

a, en thèse générale, un pôle par rapport à φ. Pour trouver les coordonnées y_i de ce point, il faut identifier les équations (4) et (3), c'est-à-dire poser

$$\begin{cases} Y_1 + \lambda \xi_1 = 0, \\ Y_2 + \lambda \xi_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Y_5 + \lambda \xi_5 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

ce qui fait cinq équations du premier degré entre cinq inconnues, λ étant une inconnue auxiliaire qui s'annexe aux coordonnées demandées. Les valeurs de ces inconnues sont autant de quotients, alternativement positifs et négatifs, dont on obtient le dé-

nominateur commun Δ en supprimant la dernière colonne dans la matrice rectangulaire

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \xi_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \xi_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \xi_5 \end{vmatrix},$$

et les numérateurs en supprimant successivement chacune des autres colonnes; on sait que Δ s'appelle *le discriminant, ou le hessien de la forme quadratique* φ.

Si l'on veut que le point (4) soit sur l'hyperquadrique, auquel cas (n° 3) son espace polaire sera tangent à celle-ci et il sera lui-même le point de contact, il faut substituer dans (1′) les coordonnées y_i. En appelant D le déterminant obtenu par l'addition d'une sixième ligne

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4, \quad \xi_5, \quad 0$$

à la matrice M, le résultat de cette substitution dans le premier membre est

$$\varphi = -\Delta D.$$

6. Tout point qui a l'espace de l'infini pour espace polaire s'appelle *un centre* de l'hyperquadrique. Lorsque le centre est à l'infini, il est sur son propre espace polaire, en conséquence de cette définition; il est donc aussi sur l'hyperquadrique et celle-ci est tangente à l'espace de l'infini. Admettons maintenant que l'équation (4) représente cet espace particulier (1) et, par suite, que les coordonnées du centre sont déterminées par les équations (5).

Si les équations (5) sont toutes indépendantes les unes des autres, le système équivaut à quatre équations entre les quatre coordonnées y_i et représente par conséquent *un point*. Si les quatre premières sont indépendantes et ont la cinquième pour conséquence, le système, réduit à trois équations par l'élimina-

(1) Alors quatre des coefficients ξ sont nuls sans que le cinquième le soit.

tion de λ, représente *une droite dont tous les points sont des centres.* Si les trois premières sont indépendantes et que les deux autres en résultent, le lieu des centres est *un plan.* C'est *un espace* si ce sont seulement les deux premières.

Conformément à la marche classique, c'est sur la considération des centres que nous ferons reposer la discussion des hyperquadriques; elle occupera deux paragraphes, l'un contenant les trois derniers cas que l'on vient de reconnaître, et l'autre le premier.

§ 42. — Hyperquadriques ayant une infinité de centres.

I. — Cylindre de première espèce.

Supposons d'abord que les quatre premières des équations (5), savoir

$$(6)\quad Y_1+\lambda\xi_1=0,\quad Y_2+\lambda\xi_2=0,\quad Y_3+\lambda\xi_3=0,\quad Y_4+\lambda\xi_4=0,$$

sont indépendantes les unes des autres et impliquent la cinquième

$$(7)\qquad Y_5+\lambda\xi_5=0;$$

nous avons déjà dit qu'alors ces équations représentent une droite : nous l'appellerons *l'axe des centres,* A^c.

Si nous y faisons $\lambda=0$, il vient

$$(8)\qquad Y_1=0,\quad Y_2=0,\quad Y_3=0,\quad Y_4=0$$

et, si nous admettons d'abord *que ces nouvelles équations sont indépendantes,* elles représentent un point que nous appellerons *un sommet.* Ce sommet est évidemment sur l'axe des centres, c'est-à-dire satisfait aux équations (6) et (7), et, non moins évidemment, il satisfait aussi à cette dernière quand on y fait $\lambda=0$, c'est-à-dire à

$$(9)\qquad Y_5=0;$$

il suit de là qu'il satisfait aussi à l'équation (1), qu'*il est sur l'hyperquadrique.*

Puisqu'il est un centre, l'espace de l'infini est son espace polaire

et, puisqu'il est sur l'hyperquadrique, il est aussi sur son espace polaire. *Il est donc à l'infini.*

Soient y'_i ses coordonnées, y''_i celles d'un autre point quelconque de l'hyperquadrique, $y'_i + ky''_i$ celles d'un point quelconque de la droite $y'_i y''_i$. Si nous substituons ces dernières dans (1), un terme tel que $a_{12}x_1x_2$ en donne quatre autres qui sont : un terme $a_{12}y'_1y'_2$, et l'addition de tous les termes analogues donne *zéro* parce que y' est sur l'hyperquadrique; un terme $k^2 a_{12}y''_1y''_2$ qui donne la même chose parce que y'' y est aussi ; un terme $ky''_2 . a_{12}y'_1$, et, si l'on additionne tous les termes analogues en laissant k''_2 en facteur commun, l'autre est nul parce que les y'_i satisfont aux équations (8) et (9); enfin un terme $ky''_1 . a_{12}y'_2$, qui donne le même résultat pour la même raison.

On a donc *zéro* comme résultat final de la substitution dans (1); c'est dire que tous les points de la droite $y'y''$ sont sur l'hyperquadrique; en d'autres termes, celle-ci est un lieu de droites dirigées vers un même point de l'infini de l'étendue; en d'autres termes encore, un lieu de droites parallèles entre elles : *c'est un cylindre que nous avons sous les yeux.*

Pour voir quel est ce cylindre, coupons-le par notre espace, lequel a pour équation $x_4 = 0$. En biffant tout simplement dans l'équation (1) les termes en x_4, nous avons de suite l'équation de cette intersection en trois coordonnées homogènes $\frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}$, c'est une *surface* dont la spécification ne serait plus qu'une question de géométrie à trois dimensions, à laquelle nous ne nous arrêterons pas. *Tous ces points appartiennent au cylindre,* et l'on peut l'appeler *sa base;* elle a pour centre l'intersection de A^c avec notre espace.

On appelle *cylindre de première espèce* ce cylindre qui a pour *génératrices* des droites et, pour *base* ou *directrice,* une surface du second degré pouvant être

l'ellipsoïde,
le paraboloïde elliptique ou hyperbolique,
l'hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes.

Chaque génératrice contient un ∞^1 de points; la directrice, homogène avec un plan, en contient un ∞^2; cela fait ∞^3 pour le lieu

engendré, et ce nombre est bien celui des points de l'hyperquadrique, laquelle est homogène avec un espace.

II. — Cone de seconde espèce.

Le résultat qu'on vient d'obtenir suppose que les quatre équations (8) sont indépendantes et, par suite, représentent un point. Si elles ne le sont pas, on voit aisément que les équations (6) ne peuvent être satisfaites qu'en attribuant à λ la valeur $\lambda = 0$, qui remplace les équations (6) et (7) par

$$(10)\quad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad Y_3 = 0, \qquad Y_4 = 0, \qquad Y_5 = 0.$$

Ces cinq équations n'en font que trois en réalité et représentent une droite, qui est encore un axe *des centres* A^c, non situé à l'infini (1).

Par un raisonnement analogue à celui qui a été tenu plus haut, on montrera que la droite joignant un point quelconque de A^c à un point quelconque m de l'hyperquadrique est tout entière sur celle-ci. Il s'ensuit que le plan passant par A^c et par le point m y est aussi tout entier. L'hyperquadrique est donc un *lieu de plans* passant tous par la droite A^c. Celle-ci est à la fois un *axe de centres* A^c et un *axe de sommets* A^s.

Cette forme s'appelle un *cône de seconde espèce*. Comme chaque plan générateur contient un ∞^2 de points, on ne peut plus prendre pour directrice (ou lieu des points m) une section spatiale, ce qui ferait un ∞^4 pour le nombre des points du lieu engendré : on prendra une section plane et le cône sera dit

à base d'ellipse,
» de parabole,
» d'hyperbole,

suivant le cas. Les ∞^1 plans générateurs forment *une seule série*, tandis que nous verrons qu'ils en forment deux dans le cône de première espèce.

---

(1) Si elles n'en faisaient que *deux* ou *une*, on aurait *une droite* ou un *point à l'infini*.

III. — Cylindre de seconde espèce.

Revenant en arrière jusqu'au début de ce paragraphe, nous supposons maintenant que les trois premières seulement des équations (6), savoir

$$Y_1 + \lambda\xi_1 = 0, \qquad Y_2 + \lambda\xi_2 = 0, \qquad Y_3 + \lambda\xi_3 = 0,$$

sont indépendantes et impliquent les deux autres

$$(7') \qquad Y_4 + \lambda\xi_4 = 0 \qquad Y_5 + \lambda\xi_5 = 0.$$

Les équations (6) représentent alors un plan : *le plan des centres,* P^c.

Si nous y faisons $\lambda = 0$, il vient

$$(8') \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad Y_3 = 0,$$

et, si nous admettons d'abord que les nouvelles équations sont indépendantes, elles représentent une droite, que nous appellerons une *droite-sommet,* D^s. Cette droite est évidemment sur P^c, et elle satisfait, non seulement aux équations (8), mais encore à

$$(9') \qquad Y_4 = 0, \qquad Y_5 = 0.$$

Il suit de là qu'elle est sur l'hyperquadrique.

Puisqu'un quelconque c de ses points est un centre et se trouve en même temps sur l'hyperquadrique, il ne peut être qu'à l'infini. On verra, comme tout à l'heure, que la droite joignant le point c à un autre point quelconque m de l'hyperquadrique est tout entière sur celle-ci, qui est dès lors constituée par des plans ayant en commun une même droite dans l'espace de l'infini.

Nous avons affaire au *cylindre de seconde espèce,* lieu des plans menés parallèlement à un plan fixe par les divers points m d'une courbe, que rien n'empêche de supposer plane et qui est alors une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Mais, si les équations (8) ne sont pas indépendantes, on est obligé de supposer $\lambda = 0$; alors les équations (6') et (7') prennent la forme (10), n'équivalant maintenant qu'à deux équations indépendantes et représentant un plan P^c : notre hyperquadrique est constituée par deux espaces se coupant suivant ce plan.

IV. Nous mentionnons seulement pour mémoire les cas où les équations (5) n'en vaudraient que deux, ou qu'une seule : l'hyperquadrique serait constituée, dans le premier par deux espaces parallèles ou coïncidents, dans le second par l'espace de l'infini compté deux fois.

En définitive, nous avons déjà reconnu trois formes du second degré spéciales à la Géométrie à quatre dimensions : le *cylindre de première espèce, celui de seconde espèce,* et le *cône de seconde espèce.* Quant au cône de première espèce, comme il n'a qu'un centre, il veut être placé dans le paragraphe suivant, où d'ailleurs sa déduction nous sera plus facile.

§ 43. — Hyperquadriques n'ayant qu'un centre.

I. — Paraboloïde et cône de première espèce.

Nous arrivons à la classe importante dans laquelle les équations (5) sont indépendantes les unes des autres et représentent un point.

Commençons par nous débarrasser du cas où ce point *est sur l'hyperquadrique.* Il faut pour cela, en vertu de l'équation (5), que le produit ΔD soit nul, c'est-à-dire que l'on ait, soit $D = 0$, soit $\Delta = 0$ (le centre serait indéterminé si l'on avait à la fois ces deux égalités).

Si $D = 0$, les équations (4) et (3) sont satisfaites simultanément ; l'hyperquadrique est tangente à l'espace de l'infini, le point de contact est un centre et il n'y en a pas d'autre. La forme que nous avons correspond à celle du *paraboloïde* de la Géométrie à trois dimensions ; c'est un type à placer à la suite des quatre qui seront examinés plus loin.

Si $\Delta = 0$, il résulte de cette relation combinée avec les équations (5)

$$\lambda = 0;$$

alors ces équations, après la suppression de λ, sont indépendantes et déterminent un point situé à distance finie. On verra comme au paragraphe 42 qu'une droite le joignant à un autre point quelconque de l'hyperquadrique est tout entière sur celle-ci, puis que sa section par notre espace est une surface du second degré.

Quant à son espace polaire ou plan tangent, c'est un quelconque des espaces, en nombre ∞^2, qu'il détermine avec un quelconque des plans tangents de cette surface. Nous avons le *cône de première espèce,* qui vient compléter la liste des cônes et cylindres et peut, comme le cylindre de première espèce, avoir pour base ou directrice une surface quelconque du second degré. En conséquence de ce mode de génération, il contient un ∞^1 de plans qu'on peut appeler aussi *ses plans générateurs.* Ils forment *deux séries;* deux plans qui appartiennent à une même série ne se coupent que dans le sommet, et deux plans qui appartiennent à des séries différentes se coupent suivant une droite; on n'a qu'à le concevoir s'appuyant sur un hyperboloïde à une nappe pour se rendre compte de cette propriété.

Il n'y a plus désormais devant nous que des hyperquadriques ayant pour centre *un point déterminé, situé dans la région finie de l'étendue.* Nous pouvons donc transporter en ce point l'origine des coordonnées et, les supposant rectangulaires, faire subir à la fonction φ la transformation si connue à la suite de laquelle il ne reste, avec une constante, que des termes contenant les carrés des coordonnées. C'est une opération purement algébrique, aux détails de laquelle nous ne nous arrêterons pas; nous passons de suite à *l'équation réduite* et, abandonnant les coordonnées homogènes, nous la prenons sous la forme

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1 - t} + \frac{x_2^2}{\alpha_2 - t} + \frac{x_3^2}{\alpha_3 - t} + \frac{x_4^2}{\alpha_4 - t} = 1, \tag{11}$$

α_1, α_2, α_3, α_4 étant des constantes et t un paramètre arbitraire. Avec deux termes, cette forme donne les *coniques homofocales* de la Géométrie à deux dimensions et, avec trois, les *quadriques homofocales* de celle à trois; elle va donner maintenant les *hyperquadriques homofocales.*

En considérant les x_i comme données, l'équation (11) est du quatrième degré en t, et il est facile de voir que ses quatre racines sont réelles. Si l'on a eu soin d'écrire les constantes α_1, α_2, α_3, α_4 dans l'ordre de grandeur décroissante, ces quatre racines t_1, t_2, t_3, t_4 se placent dans leurs intervalles comme ceci :

$$\alpha_1 > t_1 > \alpha_2 > t_2 > \alpha_3 > t_3 > \alpha_4 > t_4 > -\infty. \tag{12}$$

On les appelle les *coordonnées elliptiques* du point p dont x_1, x_2, x_3, x_4 sont les *coordonnées ordinaires*. Celles-ci peuvent s'en déduire par les formules

$$\begin{cases} x_1^2 = -\dfrac{(\alpha_1 - t_1)(\alpha_1 - t_3)(\alpha_1 - t_2)(\alpha_1 - t_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)}, \\ x_2^2 = \ldots, \qquad x_3^2 = \ldots, \qquad x_4^2 = \ldots, \end{cases}$$

les trois dernières résultant de la première par la permutation circulaire des indices des α.

II. — Intersection de l'hyperquadrique avec son espace tangent.

C'est ici le lieu de préciser les notions de *tangence,* parce qu'elles reçoivent leur pleine expression dans les configurations que nous allons voir.

Un *espace,* un *plan,* une *droite* coupent respectivement l'hyperquadrique suivant une *surface* du second degré, une *courbe* du second degré et un système de deux *points*. On dit qu'ils lui sont tangents en un point m, quand m est un *point double* de cette intersection. Or la surface du second degré ne saurait avoir un point double sans se particulariser en un cône, et la courbe du second degré sans se particulariser en un système de deux droites. Donc, au point m de l'hyperquadrique : l'espace tangent la coupe suivant un cône ordinaire ayant ce point pour sommet, le plan tangent suivant deux droites qui s'y croisent, et la droite tangente suivant deux points qui s'y réunissent en un seul.

Il y a en chaque point m un espace tangent, un ∞ de plans tangents et un ∞^2 de droites tangentes. Le premier a pour équation, a_1, a_2, a_3, a_4 étant les coordonnées du point m :

$$\frac{a_1 x_1}{\alpha_1 - t} + \frac{a_2 x_2}{\alpha_2 - t} + \frac{a_3 x_3}{\alpha_3 - t} + \frac{a_4 x_4}{\alpha_4 - t} = 1.$$

Parmi les seconds, il en est un pour lequel les deux droites qui forment son intersection avec l'hyperquadrique sont réunies en une seule : on l'appelle le *plan hypertangent* suivant cette droite, dont il est le plan polaire. Pour l'hyperquadrique entière, il y a un ∞^3 de plans hypertangents, un sur chacune de ses droites, et un ∞^5 de plans tangents.

III. Les hyperquadriques comprises dans l'équation (11) se rangent en *quatre types,* qui correspondent respectivement aux valeurs du paramètre t comprises dans les quatre intervalles définis par les inégalités (12); t_4 est une de ces valeurs pour le quatrième intervalle, t_3 pour le troisième .... Nous admettrons d'abord qu'on ne prend que des valeurs *comprises* dans les intervalles, et qu'on exclut celles $t = \alpha_4$, $t = \alpha_3$, ... *faisant les passages* d'un intervalle à un autre.

Les ∞^3 droites sont toutes imaginaires dans le premier et le quatrième types; le deuxième et le troisième ont des régions où elles sont réelles et d'autres où elles sont imaginaires.

Premier type. — Prenons t dans le quatrième intervalle, celui où est t_4. L'hyperquadrique n'a pas de point réel à l'infini. Les espaces coordonnés la coupent suivant des ellipsoïdes, et elle ne contient que des surfaces fermées. En un quelconque de ses points, l'espace tangent la coupe suivant un cône imaginaire et la laisse tout entière du même côté. Elle comprend comme cas particulier l'*hypersphère* (1), qui a été étudiée dans le *Traité élémentaire* (§ 31, 32, 33).

Deuxième type. — Prenons t dans le troisième intervalle, celui où est t_3. L'espace $x_4 = 0$ coupe l'hyperquadrique suivant un ellipsoïde et les trois autres la coupent suivant des hyperboloïdes à une nappe. D'autres espaces peuvent donner un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde.

Pour voir en particulier ce que donne celui de l'infini, soit

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 1 \tag{13}$$

(1) Dans le cours de notre travail, l'occasion était belle, et forte la tentation, de faire de la néologie sur une grande échelle. Nous nous en sommes garé soigneusement : l'acception particulière donnée aux mots *champ* et *étendue* est peut-être tout ce que nous nous sommes permis en ce genre. Le mot *hypersphère*, qui n'est d'ailleurs pas de notre création, est une conséquence naturelle de la nomenclature que nous avons suivie; nous devons toutefois prévenir le lecteur qu'il est employé aussi, et avec un tout autre sens, en Géométrie lobatschewskienne (*voir* LECHALAS, *Revue des questions scientifiques,* octobre 1903). Les deux branches ont trop peu de points de contact (celui dont nous sommes ici voisins est peut-être le seul), pour que ce double emploi ait des inconvénients; s'il en était ainsi, le mot devrait rester à l'autre Géométrie.

un espace quelconque; divisons les équations (11) et (13) par x_4 et posons

$$\frac{x_1}{x_4}=y_1, \qquad \frac{x_2}{x_4}=y_2, \qquad \frac{x_3}{x_4}=y_3;$$

elles deviennent

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{y_1^2}{\alpha_1-t}+\dfrac{y_2^2}{\alpha_2-t}+\dfrac{y_3^2}{\alpha_3-t}=\dfrac{1}{t_3-\alpha_3}, \\ \xi_1 y_1+\xi_2 y_2 \quad +\xi_3 y_3 \quad =-\xi_4, \end{cases}$$

qui représentent, en coordonnées tridimensionnelles y, la première un ellipsoïde, la seconde un plan, ensemble une certaine courbe. Pour $x_4=\infty$, cette courbe correspond au cône asymptote de l'intersection de l'hyperquadrique avec l'espace de l'infini; suivant qu'elle est réelle, réduite à un point ou imaginaire, ce cône asymptote est réel, ne contient qu'une droite réelle, ou est imaginaire, et l'intersection de l'hyperquadrique avec l'espace de l'infini est un hyperboloïde à une nappe, un paraboloïde elliptique ou une surface fermée.

Troisième type, qui prend t dans le deuxième intervalle. Il est coupé suivant un hyperboloïde à une nappe par les deux espaces coordonnés $x_4=0$, $x_3=0$, suivant un hyperboloïde à deux nappes par les deux autres. D'autres espaces peuvent le couper suivant des paraboloïdes hyperboliques, mais jamais suivant un paraboloïde elliptique ou une surface fermée. En chaque point le cône qui lui est commun avec l'espace tangent est toujours réel.

Quatrième type, pour lequel t est dans le premier intervalle, c'est-à-dire entre α_1 et α_2. Les hyperquadriques de ce type coupent l'axe des x_1 en des points réels, les trois autres en des points imaginaires, l'espace $x_1=0$ suivant une surface imaginaire, les trois autres suivant des hyperboloïdes à deux nappes. Elles contiennent des ellipsoïdes réels et des paraboloïdes elliptiques, mais point d'hyperboloïdes à une nappe. Elles ne contiennent aucune droite réelle et, dès lors, leur espace tangent n'a en commun avec elles qu'un cône imaginaire.

IV. Pour en finir avec cette longue discussion, il nous reste à

examiner les hyperquadriques, déterminées par les valeurs, laissées expressément de côté jusqu'ici, que prend le paramètre t en passant d'un intervalle au suivant, dans l'échelle tracée par les inégalités (12).

1° Pour $t = \alpha_4$, le dénominateur du quatrième terme de l'équation générale (11) est *zéro;* alors cette équation n'a de sens que si l'on y fait aussi $x_4 = 0$ et si l'on y considère le $\frac{0}{0}$ comme positif, puisqu'il représente la limite de valeurs positives. En le faisant passer au second membre, l'équation (11) prend la forme

$$x_4 = 0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1 - \alpha_4} + \frac{x_2^2}{\alpha_2 - \alpha_4} + \frac{x_3^2}{\alpha_3 - \alpha_4} - 1 \leqq 0,$$

ce qui veut dire que l'hyperquadrique du premier type devient en *montant* à la limite $t = \alpha_4$, le lieu des points qui sont à l'intérieur de l'ellipsoïde

$$(15) \qquad x_4 = 0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1 - \alpha_4} + \frac{x_2^2}{\alpha_2 - \alpha_4} + \frac{x_3^2}{\alpha_3 - \alpha_4} = 1.$$

Celle du deuxième type devient, en *descendant* à la même limite, le lieu des points qui sont extérieurs au même ellipsoïde. Ensemble elles font l'espace entier des $x_1 x_2 x_3$;

2° L'hyperquadrique générale de deuxième type et celle du troisième ont pour limite, quand leur paramètre t tend de part et d'autre vers la valeur α_3, la première, la position de l'espace $x_3 = 0$ située à l'intérieur de l'hyperboloïde à une nappe

$$(16) \qquad x_3 = 0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1 - \alpha_3} + \frac{x_2^2}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{x_4^2}{\alpha_3 - \alpha_4} = 1,$$

la seconde celle située à l'extérieur de la même surface;

3° Même chose à dire pour les hyperquadriques des troisième et quatrième types, leur limite commune α_2, et l'hyperboloïde à deux nappes

$$(17) \qquad x_2 = 0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{x_3^2}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{x_4^2}{\alpha_2 - \alpha_4} = 1;$$

4° Enfin l'hyperquadrique du premier type, quand son paramètre t passe à la limite α_1, devient l'espace $x_4 = 0$, dont tous les

points satisfont à la condition

$$(18)\qquad x_4 = 0, \qquad -\frac{x_2^2}{\alpha_1-\alpha_2} - \frac{x_3^2}{\alpha_2-\alpha_3} - \frac{x_4^2}{\alpha_2-\alpha_4} - 1 < 0.$$

Situées respectivement dans les quatre espaces coordonnés, les surfaces (15), (16), (17) et la surface imaginaire

$$x_4 = 0, \qquad \frac{x_2}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_2-\alpha_3} + \frac{x_4^2}{\alpha_2-\alpha_4} + 1 = 0,$$

jouent par rapport aux hyperquadriques homofocales (11) le même rôle que les *lignes focales* de la Géométrie à trois dimensions par rapport aux quadriques homofocales; elles sont le point de départ d'une théorie correspondante à celle dont ces lignes ont été l'objet entre les mains de Chasles (1).

(1) *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second degré homofocales* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V). *Voir* aussi les Traités de Géométrie analytique, par exemple celui de Pruvost, t. II, p. 365.

CHAPITRE VII.

LES QUARTIQUES.

§ 44. — Classification.

I. — Faisceau d'hyperquadriques.

Deux *surfaces* du second degré, ou *quadriques* de la Géométrie à trois dimensions, ont pour intersection une *courbe* du quatrième degré appelée *quartique*. Dans certains cas particuliers, comme celui de deux sphères, cette courbe est plane, mais, dans le cas général, elle traverse une *succession de plans* en n'ayant qu'un *point* pour trace dans chacun d'eux; en d'autres termes, elle passe dans diverses régions de l'*espace;* on exprime ce fait en disant qu'elle est gauche ou *à double courbure* (1).

Deux *hypersurfaces* du second degré, ou *hyperquadriques,* ont pour intersection une *surface* du quatrième degré appelée aussi *quartique*. Dans certains cas particuliers, comme celui de deux hypersphères, où elle est une sphère, cette surface est tout entière dans un espace; mais dans le cas général elle traverse une *succession d'espaces,* n'ayant qu'une *courbe* pour trace dans chacun d'eux; en d'autres termes, elle passe successivement dans diverses régions de l'*étendue*. Il n'y a pas de mot exprimant cette manière d'être et correspondant au mot *gauche* de la Géométrie à trois dimensions. Mais ce mot, s'il existait ou si nous le faisions, ne créerait pas plus que ne le fait le mot gauche une différence spécifique entre le cas particulier et le cas général; c'est toujours

(1) Cette courbe a été discutée pour la première fois d'une manière complète par Painvin (*Nouv. Ann de Math.*, 2e série, t. VII, 1868); plus récemment par Andoyer (*Id.*, 3e série, t. XV, 1896).

une *surface*, chose à deux dimensions, homogène avec le plan et se mesurant comme lui en *mètres carrés*, tandis que l'hyperquadrique est une chose à trois dimensions, homogène avec l'espace et se mesurant comme lui en *mètres cubes*, et que le *contenu* de l'hyperquadrique, quand elle est fermée, est une chose à quatre dimensions, se mesurant par une unité plus élevée d'un degré : le *mètre octaédroïde* (*voir* p. 30).

Soient $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ les équations des deux hyperquadriques : φ ne sera pas autre chose que le développement (1) ou (2) du paragraphe 41, et ψ sera ce que devient φ quand on remplace a par b. L'intersection est représentée par les deux équations simultanées

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0; \tag{19}$$

c'est une *surface du quatrième degré* (¹) que nous désignerons par **S** dans tout ce qui suit.

λ étant un paramètre arbitraire, l'équation

$$\varphi + \lambda\psi = 0 \tag{20}$$

représente un ∞^1 d'hyperquadriques passant par la surface (19) : c'est un *faisceau d'hyperquadriques* dont φ et ψ sont les *hyperquadriques fondamentales* et dont **S** est le *support*. Si l'on pose

$$a_i + \lambda b_i = c_i,$$

l'équation (20) résulte à son tour de (19) en y remplaçant a par c.

Par un point donné p de l'étendue il passe une hyperquadrique du faisceau : c'est celle correspondant à la valeur λ qui résulte de l'équation (20) quand on y substitue les coordonnées de p.

Tout point p de l'étendue a, naturellement, des espaces polaires différents par rapport aux diverses hyperquadriques du faisceau; mais, comme leur nombre est ∞^1, ces espaces forment aussi un faisceau et passent tous par un même plan P. On dit que P est le

(¹) C'est par inadvertance qu'il a été dit dans le *Traité élémentaire* (§ 30) que l'intersection de deux hypersurfaces est une *surface du second degré* et celle de trois une *courbe du second degré;* il faut lire : *une surface du quatrième degré* et une *courbe du huitième degré*.

plan polaire de p par rapport à **S** et, réciproquement, que *p est le pôle de* P *par rapport à* **S**.

L'hyperquadrique du faisceau qui passe par p y a pour espace tangent l'espace déterminé par le point p et le plan P. Si elles y passent toutes, c'est-à-dire si p se trouve à l'intersection commune **S**, P est le plan tangent à **S** en p : lieu des droites qui sont tangentes en ce point à toutes les courbes de **S** qui y passent, et intersection commune des espaces tangents en ce point à toutes les hyperquadriques du faisceau.

II. — Théorème de Weierstrass.

D'après ce qu'on a vu paragraphes **42** et **43**, l'équation (20) représente un cône si, ayant remplacé a_i par $a_i + \lambda b_i$, on trouve que le discriminant Δ est égal à zéro. Comme chacun des vingt-cinq termes de Δ est un produit de cinq facteurs tels que $a + \lambda b$, l'équation $\Delta = 0$ est du *cinquième degré* en λ. Il y a donc, en thèse générale, *cinq cônes* dans le faisceau (20); pour faire plus ample connaissance avec celui-ci, il faut procéder à un examen plus détaillé des manières dont Δ peut s'annuler. Cet examen, moins simple ici qu'au début du Chapitre, est facilité par l'emploi du théorème suivant, dû à Weierstrass. Appelons

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_5$$

les racines de l'équation $\Delta = 0$, en fonction desquelles Δ prend la forme

$$\Delta = K(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_5). \tag{21}$$

Le nombre 5 peut se décomposer en nombres plus petits de *sept manières,* que nous écrivons comme ceci :

$$[11111], \quad [1112], \quad [122], \quad [113], \quad [23], \quad [14], \quad [5],$$

et qui donnent à Δ autant de formes différentes correspondant aux divers cas d'égalité des racines λ_i. Soit n_i le nombre de fois que se rencontre dans l'une d'elles le binome $(\lambda - \lambda_i)$, i désignant un des cinq nombres 1, 2, 3, 4, 5 et les n_i satisfaisant naturellement à la condition

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_5 = 5. \tag{22}$$

Soient en outre : n'_i le nombre de fois que le binome se rencontre dans les cinq premiers sous-déterminants Δ'. n'' le nombre de fois qu'il se rencontre dans les quatre seconds Δ'' .... Un de ces nombres ne saurait être plus petit que le suivant et il en est de même pour leurs différences

$$e_i = n_i - n'_i, \qquad e'_i = n'_i - n''_i. \qquad \ldots.$$

En outre il est facile de voir que

$$(23) \qquad (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i}(\lambda - \lambda_i)^{e'_i}\ldots.$$

Les facteurs qui forment le second membre s'appellent *les diviseurs élémentaires de* Δ (*Elementartheiler* de Weierstrass) (1). Quand on passe de Δ à Δ', le premier de ces facteurs, $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ s'en détache; le second s'en détache à son tour quand on passe de Δ' à Δ'', etc., et ainsi de suite. C'est une sorte de constitution moléculaire où les sept formes de groupement qui se sont tout d'abord présentées à nous ne sont plus que des premiers termes.

Un diviseur élémentaire peut appartenir une ou plusieurs fois à la même racine. Pour faire ressortir cette circonstance, on réunit dans une parenthèse, comme $(m, n, \ldots)$, les nombres qui expriment les multiplicités respectives des divers diviseurs de la racine. Par exemple : [113] veut dire que Δ a trois diviseurs élémentaires, un simple $(\lambda - \lambda_1)$, un simple $(\lambda - \lambda_2)$, un triple $(\lambda - \lambda_3)$; et [1(13)] veut dire que Δ a un premier diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_1)$ une fois, puis un second $(\lambda - \lambda_2)$ quatre fois; que le premier n'est plus dans Δ', mais que le second y est encore une fois; qu'ils ne sont plus ni l'un ni l'autre dans Δ''. En opérant de la même manière pour les six autres termes, on forme le Tableau suivant :

[11111]	[2111]	[221]	[311]	[32]	[41]	[5]
[(11) 111]	[(21) 11]	[2(21)]	[(31) 1]	[(32)]	[(41)]	
[(11)(11) 1]	[21 (11)]	[(22) 1]	[3(11)]			
»	[(21)(11)]	»	»			
[(111) 11]	»	[(221)]	[(311)]			
[(111)(11)]	[(211) 1]					
[(1111) 1]	[2(111)]					
	[2111]					

(1) *Voir* MÜHL, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig, 1899.

Cela posé, le théorème de Weierstrass (simplifié et particularisé) s'énonce ainsi : *Deux formes quadratiques données* φ, ψ *et deux autres* φ_1, ψ_1 *peuvent se changer l'une dans l'autre par une même transformation linéaire quand leurs discriminants* Δ *ont les mêmes diviseurs élémentaires et ne le peuvent pas dans le cas contraire; il en est de même pour la transformation par rayons vecteurs réciproques.* En vertu de ce théorème, les *vingt-six* termes ci-dessus *classent* les formes quadratiques homogènes à cinq variables, c'est-à-dire les surfaces quartiques de la Géométrie à quatre dimensions.

Ce sont comme autant d'étiquettes qu'on appelle les *caractéristiques.* Il s'attache à chacune d'elles une classe de quartiques dont les deux équations, réduites au maximum de simplicité, prennent le nom d'*équations canoniques* et ont pour coefficients précisément les coefficients des diviseurs élémentaires, qui sont de véritables invariants du couple d'équations. Si l'on veut connaître les propriétés de la classe, il faut en définitive former et discuter les équations, ainsi que nous l'avons fait sommairement pour les quadriques à centre; nous ne nous livrerons pas à ce travail, la seule considération des caractéristiques devant suffire à nos besoins (1).

III. — Les caractéristiques.

On peut dire indifféremment la *caractéristique de la quartique,* ou bien *la caractéristique du faisceau d'hyperquadriques* dont elle est le support. Cette donnée fait connaître immédiatement la constitution du faisceau en ce qui concerne les cônes, et celle de la surface quartique en ce qui concerne ses points singuliers.

---

(1) Dans la Géométrie à trois dimensions, l'intersection de deux surfaces du second degré, qui est une *ligne,* comporte *treize* caractéristiques, qui correspondent aux classes reconnues dès 1868 par Painvin, et qui sont :

$$[1111],\quad [211].\quad [31].\quad [22].\quad [4],$$
$$[(11)11],\quad [(21)1],\quad [(11)2],\quad [(31)],\quad [(22)],$$
$$[(11)(11)],\quad [(211)],$$
$$[(111)1].$$

Dans celle à cinq dimensions, le lieu correspondant, qui s'appellerait le *volume quartique,* en aurait *cinquante-huit.*

A un chiffre *libre* il correspond un cône de première espèce; à deux chiffres, enfermés ensemble dans une parenthèse, un cône de seconde espèce. Plus de deux chiffres enfermés ensemble dénoncent des quadriques *dégénérées*, c'est-à-dire abaissées dans le degré ou la dimension; elles sont, dans le Tableau, séparées des autres par un trait et nous les laisserons de côté, ce qui réduit le nombre des quartiques proprement dites de vingt-six à *dix-huit*.

Un chiffre 2 correspond à un point double m de la surface **S**, point où le plan tangent est remplacé par un *cône ordinaire f*, c'est-à-dire un cône du second degré à deux dimensions. Toutes les hyperquadriques du faisceau ont en ce point le même espace tangent, celui E qui contient le cône f: car une droite quelconque de E, coupant **S** deux fois en m, coupe aussi chacune d'elles deux fois en m. Cet espace coupant chacune des hyperquadriques suivant un cône ordinaire (§ 43), ces cônes sont en nombre ∞^1 comme les hyperquadriques elles-mêmes, et ont quatre génératrices communes; il passe donc par tout point double, en général, quatre droites, distinctes ou non, situées sur la surface **S**.

Le chiffre 2 répété veut dire qu'il y a deux points doubles. La droite qui joint ces deux points appartient tout entière à la surface, car ils sont conjugués par rapport à toutes les hyperquadriques du faisceau, d'où il suit que tout point en ligne droite avec eux appartient à une de ces hyperquadriques. En outre il passe par cette droite un plan qui est tangent à toutes celles-ci : c'est l'intersection de l'espace tangent commun en m avec celui en m'.

Le chiffre 3 indique l'existence d'un point double où le cône ordinaire tangent s'est décomposé en deux plans; la *Théorie des singularités* donne à un pareil point le nom de *point biplanaire de première espèce*. Pour un chiffre 4, la droite d'intersection des deux plans tangents appartient tout entière à la surface, et, pour un chiffre 5, un des deux plans lui est tangent tout le long de celle-ci. Ces deux cas peuvent être considérés comme la réunion des degrés 1 et 2 ou 2 et 3, et le point biplanaire correspondant est dit *de deuxième* ou *de troisième espèce*.

IV. — Les dix-huit classes.

La caractéristique [11111] est celle du *cas général*. Il y a dans le faisceau *cinq cônes de première espèce*. Leurs sommets jouissent de cette propriété que chacun d'eux est le pôle de l'espace des quatre autres par rapport à une quelconque des hyperquadriques du faisceau.

Avec [2111], il n'y a plus que quatre cônes, et la surface **S** a un point double m. Nous avons déjà vu qu'alors la surface **S** a quatre droites passant par le point m. Celui-ci est le sommet d'un des cônes à trois dimensions du faisceau, lequel compte pour deux et peut être pris pour l'une φ des hyperquadriques fondamentales. Il a un plan générateur passant par chacune des quatre droites déjà trouvées sur **S**; il y en a sur chacun d'eux une deuxième appartenant aussi à **S**, ce qui en fait *huit*.

On a le cas [221], c'est-à-dire trois cônes de première espèce et deux points doubles, en prenant pour les hyperquadriques fondamentales φ, ψ deux cônes de première espèce ayant chacun son sommet sur l'autre. Ces sommets m et m' sont deux points doubles de **S** et, ainsi qu'on l'a vu plus haut, la droite qui les joint appartient tout entière à **S**. En m, comme en m', toutes les hyperquadriques du faisceau ont un même espace tangent et les deux espaces E, E′ se coupent suivant un plan qui est le plan tangent (unique) à la surface tout le long de la droite mm'. Les ∞^1 cônes à deux dimensions ayant pour sommet commun le point m sont tangents à un même plan le long de mm' et n'ont que deux autres génératrices communes. En raisonnant comme ci-dessus, on trouvera donc que le sommet m ne fournit plus à **S** huit droites, mais seulement quatre, outre mm'; comme m' en fait autant, cela fait *neuf* droites situées sur **S**.

Nous aurons [311] (trois cônes de première espèce et un point double biplanaire) si, dans le cas précédent, nous orientons un des deux cônes fondamentaux de manière que l'espace tangent en son sommet à toutes les hyperquadriques du faisceau le touche lui-même le long d'une génératrice; huit droites sur **S**.

[32] donne deux cônes de première espèce et deux points doubles dont un biplanaire; ... et ainsi de suite jusqu'à [5], qui

clôt la première ligne du Tableau des caractéristiques, et porte à *sept* le nombre des classes où ne se trouvent que des cônes de première espèce. Dans les lignes suivantes, nous rencontrons *huit* termes où ils sont associés avec des cônes de seconde espèce, et *trois* où ceux-ci se trouvent tout seuls.

Lorsqu'il y a dans le faisceau un cône de seconde espèce, son arête coupe **S** en deux points r et r' dont chacun est un point double. Ils sont distincts pour les classes

$$[(11)111], \quad [(11)(11)1], \quad [(11)21], \quad \text{et} \quad [(11)(21)],$$

coïncidents pour les classes

$$[(31)1] \quad \text{et} \quad [(41)],$$

indéterminés pour les classes

$$[(22)1] \quad \text{et} \quad [(32)].$$

Pour celles-ci, cela veut dire que l'arête est tout entière sur la surface **S**, dont elle est même une droite double; l'intersection du cône avec cette surface se compose de cette arête et de ∞^1 droites appuyées sur elles : on a affaire à une *surface réglée*.

Pour les six autres classes, les intersections des plans générateurs du cône avec **S** forment une série de ∞^1 coniques passant toutes par z et par z'. Il y a en outre sur **S** huit droites constituant par couples quatre *coniques décomposées* qui font partie de cette série. On trouve, en effet, en raisonnant pour chacun de ces points comme nous l'avons fait plus haut pour le sommet d'un cône de première espèce, qu'il doit passer par chacun d'eux quatre droites situées sur **S**; d'ailleurs il n'y a pas sur **S** de droite ne passant pas par l'un ou par l'autre, car une pareille droite déterminerait avec eux un espace faisant partie du cône.

§ 45. — Une nouvelle halte dans la Géométrie à trois dimensions.

1. La Géométrie à trois dimensions a retourné de mille manières les *surfaces du second degré*, et il est aujourd'hui difficile de faire une découverte importante, plus encore peut-être une découverte futile, sur un terrain si exploré. Elle connaît bien aussi les *surfaces du troisième degré*, comme on l'a vu au Chapitre III. Mais elle est

moins avancée en ce qui concerne les *surfaces du quatrième degré*. Leur théorie générale n'est pas faite, et quelques-unes seulement de leurs familles ont été reconnues. Citons en particulier : celles formées par une infinité de droites, étudiées par Rohn; celles qui ont un point triple et qu'on appelle les *monoïdes* du quatrième degré, étudiées par le même auteur; celles qui ont des points doubles (de un à seize), étudiées principalement par Cayley, et parmi lesquelles se trouve la surface de Kummer, que nous avons entrevue au paragraphe 39; enfin celles *qui contiennent une conique double*.

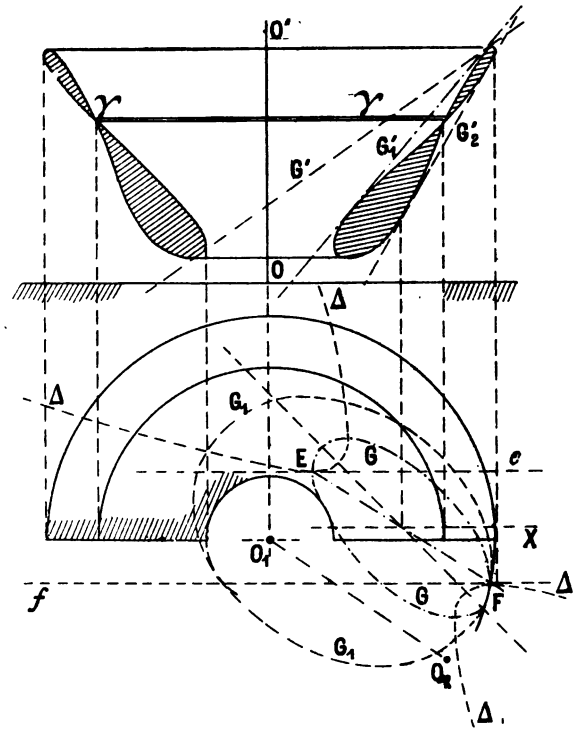
A elle seule, cette dernière famille forme un sujet plus étendu que tout l'ensemble des surfaces du troisième degré, tant la complication augmente vite à mesure qu'on monte l'échelle. C'est dans celle-là que nous voulons entrer, on verra tout à l'heure par quelle porte. Elle a aussi une littérature fort étendue et nous y rencontrerons, ou nous pourrions y rencontrer si nous voulions faire une étude complète, des mathématiciens tels que Dupin, Chasles, Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Moutard, Laguerre, Mannheim, de la Gournerie, Darboux, Clerk Maxwell, Casey, Cayley, Lemonnier, Kummer, Clebsch, Zeuthen, Cremona, Loria, Sophus Lie, Félix Klein, Reye, etc.

M. de la Gournerie a donné, en 1863 (1), sur une surface appelée par lui *tore général*, une étude qui semble faite exprès pour nous y mener par la main. La surface est engendrée par la rotation d'une conique autour d'un axe OO′ supposé vertical dans la figure 37; la conique est donnée par sa projection horizontale, qui est une ellipse G (nous nous en tiendrons exclusivement à cette forme de conique) et sa projection verticale qui est une droite G′. La ligne OX, parallèle à la ligne de terre, partage inégalement les cordes de G qui sont perpendiculaires au plan vertical, sauf une $d\mathrm{D}\delta$, celle qui la coupe au même point que le diamètre EF conjugué de ces cordes. Par suite, tandis que deux points de la conique génératrice situés à la même hauteur, autres que d et δ,

(1) *Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace* (*Journal de l'École Polyt.*, t. XXIII, 1863, p. 1-74). *Voir* aussi : *Journal de Liouville*, 1865, et CAYLEY, *Quarterly Journal*, t. X, XI, 1870.

décrivent deux parallèles distincts, ces deux points particuliers décrivent un seul et même parallèle, qui sépare les deux parties de la surface engendrées par les deux moitiés de la conique situées de part et d'autre du diamètre EF. La section méridienne est une courbe en forme de *huit,* et la surface est formée de deux nappes qui se croisent sur ce parallèle, que M. de la Gournerie appelle le

Fig. 37.



Une surface du quatrième degré à conique double.

parallèle double. En un quelconque de ses points, la surface a *deux plans tangents,* comme la section méridienne a deux tangentes.

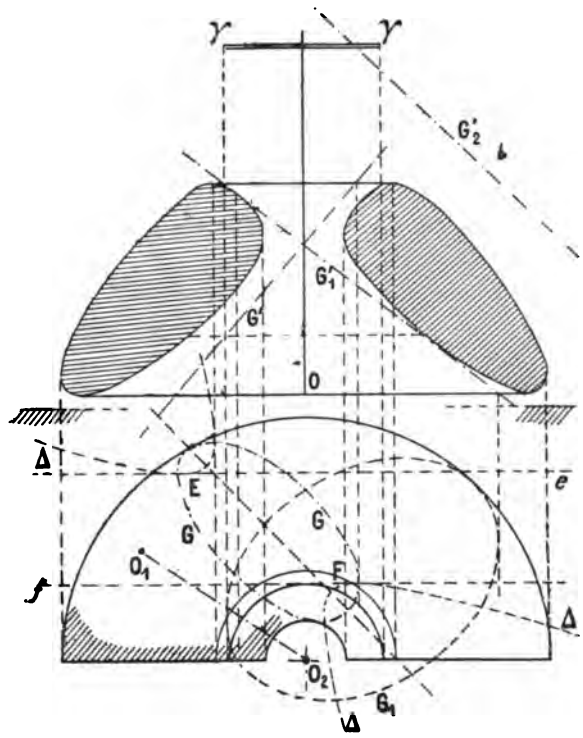
Traçons sur le plan horizontal : 1° les deux droites E*e*, F*f* passant par les extrémités du diamètre EF et parallèles au plan vertical; 2° l'hyperbole Δ ayant les mêmes foyers que G et tangente à ces deux droites. Voici ce que devient le parallèle double

suivant les différentes positions que peut prendre le pivot O par rapport à l'ellipse génératrice :

1° Quand O est entre les droites E*e* et F*f*, le parallèle double est l'*intersection de deux nappes réelles.*

2° Quand O est sur une de ces deux droites, il est rejeté tout en haut de la surface, et les nappes extérieure et intérieure de celle-

Fig. 38.



La conique double extérieure à la surface.

ci se réunissent sur lui en devenant tangentes l'une à l'autre; il forme ce qu'on appelle une *ligne cuspidale.*

3° Quand O est en dehors des deux droites, mais du côté de la convexité de l'hyperbole Δ, le parallèle double monte encore plus haut et *s'isole* du reste de la surface; une pareille position (*fig.* 38) se traduit par ce fait que les deux plans tangents qu'il a en un quelconque de ses points sont *imaginaires.* Si l'axe de l'ellipse est

vertical, le parallèle double, toujours réel, se trouve dans le plan de l'infini : c'est le cas pour le tore ordinaire, où, en outre, l'ellipse génératrice est un cercle.

4° Quand O est sur l'hyperbole Δ, le tore a un *point isolé* sur l'axe de révolution.

5° Quand O est en E ou en F, l'ellipse rencontre l'axe normalement, et la surface a un *point double avec un plan tangent unique.*

6° Enfin, quand O est à l'intérieur de l'hyperbole Δ, le parallèle double est *imaginaire.*

Les positions successives de l'ellipse génératrice (G, G′) forment un ∞^1 de coniques situées sur la surface. On trouve qu'il existe deux autres séries : la courbe (G_1, G_1') dessinée sur la figure est une ellipse de la seconde, et la troisième est imaginaire. Mais nous renvoyons au Mémoire de M. de la Gournerie pour la démonstration de ce point et les développements qui en sont la conséquence : nous ne voulons ici que mettre entre les mains du lecteur quelques images tangibles et faciles auxquelles il puisse rapporter les résultats obtenus ci-après; on verra d'ailleurs ci-après la généralisation du fait dont il s'agit.

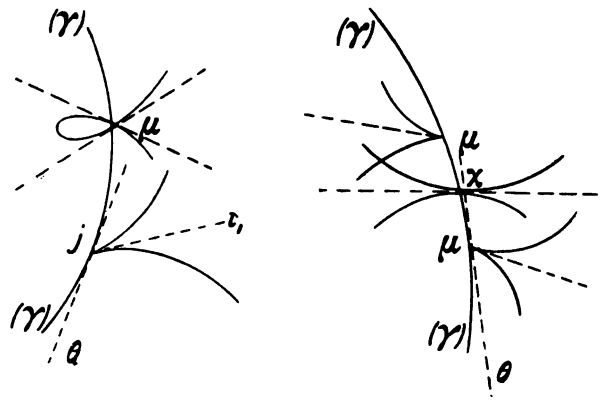
Il faut encore que l'on remarque sur le plan vertical de projection les trois lignes droites G′, G_1', G_2' : ce sont les traces de plans qui sont perpendiculaires au plan vertical de projection, et dont chacun est tangent à la surface en deux points différents, en même temps qu'il la coupe suivant une ellipse génératrice; les sections, comme les tangences, peuvent être réelles, ou imaginaires sur des plans réels, ou entièrement imaginaires. Ces trois *plans bitangents* font partie de trois séries formant ensemble un système ∞^1.

II. — Courbe double et courbe cuspidale.

Les deux plans tangents que possède le tore en chaque point du parallèle double font partout le même angle entre eux. Mais il n'y a pas rien que des surfaces de révolution. Considérons (*fig.* 39) une surface quelconque Σ ayant une *courbe double* γ et menons, par un point μ de celle-ci, un plan transversal quelconque, *ne passant pas toutefois par la tangente à* γ; la section sera une courbe σ à deux branches, ayant chacune sa tangente *t*, *t*′. Si le point μ se déplace sur γ, cet angle varie d'une manière continue,

et il peut *devenir nul.* Nous sommes alors en un point j, où le croisement est remplacé par un *rebroussement,* où les deux tangentes t et t' de la courbe σ se réunissent en une seule, et les deux plans tangents de la surface Σ en un seul; un pareil point s'ap-

Fig. 39.



Point-pince et point-clos.

pelle un *point-pince;* le mot est de Cayley et la singularité qu'il désigne est spéciale aux surfaces ayant une courbe double. Chacune des deux tangentes t et t' coupait la surface en deux points réunis en un seul; la tangente τ_1 suivant laquelle elles se réunissent, et qui est la même quel que soit le plan transversal, réunit ces deux points doubles et doit être considérée comme coupant la surface en *quatre* points réunis en un seul. On l'appelle la *tangente singulière.* Toute droite passant par j emprunte, pour ainsi dire, deux de ces points et est une *tangente ordinaire.* Tout plan qui la contient en emprunte trois et est un *plan tangent ordinaire;* mais il les a tous les quatre s'il contient en outre la tangente à γ et on l'appelle alors le *plan tangent singulier;* alors aussi sa section en j est formée d'une branche à rebroussement ayant τ_1 pour tangente et d'une branche simple ayant pour tangente la tangente à γ. En général, un point-pince forme le passage d'une partie de la courbe double le long de laquelle les deux plans tangents sont réels à une partie le long de laquelle ils sont imaginaires.

Lorsqu'une surface a une *courbe cuspidale,* une section plane

transversale faite en un point de celle-ci présente un rebroussement, sauf en certains points particuliers, qu'avec Cayley on appelle des *points-clos*, où c'est un *contact de deux branches*. Un pareil point est généralement (*fig.* 39) le passage d'une branche de la courbe cuspidale où la pointe est tournée d'un côté à une branche où elle est tournée de l'autre ; la surface y ressemble, dit Zeuthen, aux deux nappes d'un cône aplati, chaque nappe étant fermée d'un côté par la courbe cuspidale et arrondie de l'autre. Toute droite passant par un point affecté de cette singularité doit être considérée comme une tangente à la surface ; il y a en ce point un ∞^1 de plans tangents dont la commune intersection coupe la surface en un point quadruple et s'appelle *la tangente singulière ;* un de ces plans est le lieu des tangentes *aux deux branches* de toutes les sections planes et s'appelle le *plan tangent singulier ;* il contient la tangente à la courbe cuspidale.

III. Après le tore, les plus connues des surfaces du quatrième degré sont les *cyclides*. On appelle *cyclide de Dupin* l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur un plan et qui touche deux sphères données, ou encore l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une conique et qui touche une autre sphère donnée ; la définition donnée par Dupin lui-même (1), *enveloppe d'une sphère qui touche trois sphères données*, n'individualise pas une cyclide, mais en détermine quatre. Clerk Maxwell, que nous citons parmi bien d'autres, s'en est occupé à propos d'une question d'optique dans un Mémoire paru en 1868 dans le *Quarterly Journal,* et dont une traduction fut donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de la même année ; malheureusement la traduction ne reproduit pas quatre *doubles figures* de la première publication, faites pour être regardées au stéréoscope et

(1) *Applications de Géométrie et de Mécanique,* Paris, 1822, p. 200-210.

Nous nous abstiendrons d'autres indications bibliographiques parce qu'il y en aurait trop ; nous renvoyons : 1° à la Notice et à la liste données par Cayley dans *Proceedings of the London math. Soc.*, t. III, 1871, p. 186-185 ; à la liste qui remplit les quatre dernières pages de l'Ouvrage de M. Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* Paris, 1873 ; 3° aux Notes qui accompagnent le Mémoire de Segre déjà cité et qui va maintenant être notre guide : *Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double* (*Math. Ann.*, 1884).

représentant la *cyclide en fuseau,* la *cyclide en anneau,* la *cyclide parabolique* et la *cyclide à cornes.*

Les cyclides de Dupin ne sont que des cas particuliers des surfaces auxquelles Darboux a étendu ce même nom de *cyclides* parce qu'elles contiennent dix séries de sections circulaires, qu'il appelle encore *surfaces du quatrième degré ayant le cercle de l'infini pour ligne double,* et qui sont comprises dans l'équation générale

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2u_1(x^2+y^2+z^2)+u_2=0,$$

u_1 désignant un polynome homogène du premier degré et u_2 un polynome quelconque du second degré. A peu près le même sens ont la dénomination de *surfaces anallagmatiques du quatrième degré* employée par Laguerre et par Moutard, et celle de *sphéro-quartiques* employée par Casey en Angleterre. A leur tour, toutes ces cyclides ne sont que des cas particuliers des surfaces que Segre a magistralement étudiées sous le nom de *surfaces du quatrième degré à conique double, générale ou décomposée en deux droites,* en y ajoutant le cas où, au lieu d'une conique *double,* c'est une conique *cuspidale.* Chez les cyclides proprement dites, celles de Dupin et de Darboux, la conique double est toujours imaginaire, tout en appartenant à un plan réel et à des quadriques réelles, tandis que les surfaces plus générales dont il s'agit maintenant jouissent de la conique double réelle.

Dans le curieux Mémoire qui contient cette étude et dont nous avons donné le titre en note de la page précédente, Segre a fait de la théorie de ces surfaces un *corollaire de celle de l'intersection de deux hyperquadriques;* il lui a donné ainsi une forme purement géométrique, c'est-à-dire exempte de ces amas d'équations compliquées qui grèvent à l'ordinaire les questions de ce genre. Nous voudrions donner une idée de ce travail, mais elle sera forcément très lointaine et très raccourcie, car il n'occupe pas moins de 132 pages dans l'impression compacte des *Mathematische Annalen;* toutefois, comme il est écrit en français, nous n'avons pas trop de scrupule à y renvoyer le lecteur pour suppléer à l'insuffisance des pages qui suivent.

§ 46. — Projection de la quartique sur notre espace.

I. — La conique double.

Après cette halte dans la Géométrie à trois dimensions, qui a plus avancé notre besogne qu'elle n'en a l'air, nous revenons sur l'intersection de deux hyperquadriques, qu'au paragraphe 25 nous avons représentée par les deux équations simultanées

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0.$$

Voici d'abord les principales notations dont nous ferons usage, et dont quelques-unes se sont déjà montrées dans le même paragraphe 44 : en cas de besoin, le lecteur aura plus de facilité à les trouver ici qu'à chercher la page où elles auront pris naissance.

On désignera donc par

$\varphi\psi$, le faisceau d'hyperquadriques défini par l'équation (20);

χ, une hyperquadrique quelconque du faisceau, autre que φ ou ψ et de construction générale;

ω, un des cônes de première espèce qui en font partie et dont le nombre ne saurait dépasser *cinq;*

ϖ, un cône de seconde espèce, s'il y en a;

K, un cône quadrique, c'est-à-dire le cône ordinaire de la Géométrie à trois dimensions; le double mot *cône quadrique* aura exclusivement cette signification, tandis que le mot *cône* employé seul voudra toujours dire un cône hyperquadrique, de première ou de seconde espèce;

p, un point de l'étendue se trouvant sur χ et pris pour centre de projection; le mot *projection* voudra dire la projection d'un point, d'une ligne, d'une surface ou d'une hypersurface, faite de ce point sur notre espace;

S, la surface du quatrième degré représentée par les équations (19) et intersection commune de toutes les hyperquadriques du faisceau;

Σ, la projection de **S**, qui est aussi, dans notre espace, une surface du quatrième degré;

P, le plan polaire de p par rapport à **S**;

E, l'espace qui est tangent à χ au point p;

f, le cône quadrique commun à l'espace E et à l'hyperquadrique χ, son sommet est p;

ε, le plan qui est l'intersection du même espace avec le nôtre, et que nous appellerons *sa trace;*

Γ, la courbe du quatrième degré, intersection de f et de χ;

γ, la projection de Γ sur notre espace, qui est également, dans celui-ci, une courbe du quatrième degré, mais se trouvera ordinairement particularisée sous le nom de *conique double* ou un des mots analogues.

La courbe Γ, qui est l'intersection de f et de χ et dont le degré est $2 \times 2 = 4$, se trouve tout entière sur **S**.

Le cône f et le plan ε, puisqu'ils sont dans un même espace, se coupent suivant une conique γ, qui est la projection, sur notre espace, faite avec des rayons partant du point p, de toute figure tracée sur le cône, et en particulier de la courbe Γ. Une génératrice quelconque du cône a deux points, m et m', sur cette dernière et, par suite, aussi sur **S**; ces deux points de **S** sont donc projetés sur notre espace en un même point μ de la conique γ. En d'autres termes : *la surface* Σ *qui est la projection de* **S** *sur notre espace, et qui est comme elle du quatrième degré, contient une conique double* δ. *Tel est le principe de la méthode.*

Les plans tangents de **S** ont pour projection les plans tangents de Σ. En chaque point μ de la courbe double, Σ a donc deux plans tangents qui sont les projections des plans tangents à **S** aux deux points m et m' dont μ est la projection.

Ici nous regrettons de ne pouvoir pas mettre une figure sous les yeux du lecteur, et le prions de redoubler d'attention pendant un instant. Il a vu, au paragraphe 44, que l'espace déterminé par le point p et son plan polaire P est tangent à χ au point p. Toute droite située dans cet espace, en particulier une génératrice quelconque du cône f, coupe donc χ en deux points coïncidents, et comme P coupe χ et f suivant deux courbes du second degré dont les quatre points d'intersection a, b, c, d sont sur Γ, il s'ensuit que les quatre génératrices de f passant par ces quatre points sont tangentes à Γ. Il y a donc sur la projection γ quatre points μ dont chacun est la projection de deux points m, m' de **S** qui se réunissent en un seul et confondent leurs plans tangents. En chacun de

ces quatre points les deux plans tangents de Σ se confondent aussi et les deux nappes de cette surface se réunissent : ce sont des *points-pince*. Nous les avons déjà (§ 45) désignées par j, et nous désignerons par J les quatre points de **S** qui s'y projettent.

Le plan tangent à **S** en un point J passe par p, puisque ce point se trouve sur le plan polaire de p; en outre, puisqu'il est la réunion de deux plans tangents, son point de tangence est un point quadruple de **S**. Sa projection sur notre espace se réduit donc à une droite t_1 qui est sa trace, et qui coupe γ en un point comptant pour quatre. Cette droite est la *tangente singulière* de Σ au point-pince j, et il y a une tangente analogue en chacun des trois autres.

On a vu dans le paragraphe précédent que le plan passant par la tangente singulière et la tangente en j à la courbe double, lequel plan est le lieu des droites dont l'intersection avec Σ se compose de trois points réunis en j, s'appelle le *plan tangent singulier*. Les quatre plans tangents singuliers aux quatre points-pince ne sont autre chose que les traces sur notre espace des quatre espaces tangents à χ aux quatre points a, b, c, d; puisque ces quatre points sont dans un même plan P, les quatre espaces passent par une même droite, polaire par rapport à χ; donc *les quatre plans tangents singuliers des quatre points-pince de la conique double de Σ passent par un même point.*

II. — Cônes de Kummer.

La Géométrie de la surface Σ est des plus intéressantes, et il y aurait beaucoup à dire : sur ses *seize droites,* qui furent découvertes par Darboux en 1864, et qui ont la même configuration que celles restant des ving-sept droites d'une surface du troisième degré (§ 21) quand on en a retiré *une quelconque et les dix qui la rencontrent* (¹); sur ses *quarante plans tritangents,* dont la configuration est la même que ceux qui restent quand des quarante-cinq plans tritangents d'une surface du troisième degré on

(¹) *Voir* de Vries, *La configuration formée par les droites d'une surface du quatrième degré à conique double* (*Arch. néerlandaise des Sc. math. et nat.*, 2ᵉ série t. VII, 1902, p. 460).

en a retiré *cinq passant par une même droite;* sur les surfaces du second degré qui lui sont inscrites; sur son *image plane,* qui a été découverte par Clebsch et jouit de cette propriété que les points de l'une et de l'autre figure sont en correspondance univoque; sur ses foyers et ses homofocales; sur les propriétés qui lui ont valu le nom d'*anallagmatique* auprès des mathématiciens français, etc., toutes questions relevant de la méthode qui nous occupe. Nous ne voulons que jeter un regard, encore le ferons-nous rapidement, sur les *plans bitangents,* en nombre ∞^1 comme chez la surface du troisième degré, mais différant de ceux-ci en ce que la droite joignant les deux points de tangence *n'appartient à la surface que par ces deux points.*

Prenons d'abord le cas général où les cinq cônes du faisceau d'hyperquadriques dont **S** est le support (§ 44, II) sont tous de première espèce et distincts; alors aucun n'a son sommet sur **S**. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 43, chacun d'eux contient un ∞^1 de plans générateurs qui forment deux séries, deux plans d'une même série n'ayant de commun que le sommet du cône, deux de séries différentes ayant en commun une génératrice. En outre, deux plans générateurs de cônes différents ont pour intersection un point, comme c'est le cas pour tout couple de plans non particularisé, et il est inutile de dire que ce point appartient à **S**.

Chaque plan générateur est coupé par une autre hyperquadrique du faisceau suivant une conique appartenant à **S**; réciproquement, le plan de toute conique de **S** appartient à l'un d'eux, car si l'on considère l'hyperquadrique du faisceau passant par un point de ce plan autre que ceux de la conique, elle devra contenir le point et la conique, c'est-à-dire le plan tout entier, et les cônes sont les seules hyperquadriques contenant des plans. Donc la surface **S** contient ∞^1 coniques, lesquelles forment autant de systèmes qu'il y a de cônes dans le faisceau, c'est-à-dire cinq. Chaque système se décompose en deux séries, comme les plans générateurs du cône qui le donne. Deux coniques ont *un, deux* ou *zéro* points communs : *un* quand elles sont de systèmes différents; *deux,* que nous appellerons α et β, quand elles sont de même système et de séries différentes; *zéro* quand elles sont de même système et de même série.

Projetons sur notre espace en prenant pour centre de projec-

tion un point p de l'étendue qui ne soit pas sur un des cinq cônes ; nous devons retrouver ces coniques sur la surface Σ projection de **S**. La projection de chacune d'elles est faite par un espace que déterminent le point p et le plan la contenant; cet espace H contient aussi un deuxième plan générateur et une deuxième conique qui sont du même cône ω et de l'autre série; il est tangent à ω le long de la droite d'intersection des deux plans, laquelle contient les deux points α et β, et il est tangent à **S** en chacun de ces points. La droite $\alpha\beta$ se trouve dans l'intersection du cône ω avec l'espace polaire du point p par rapport à ce cône ω lui-même (§ 43, II); elle et ses pareilles ne sont pas autre chose que les génératrices du cône quadrique qui constitue cette intersection. Appelons celui-ci K; appelons en outre k sa projection sur notre espace, qui est aussi un cône quadrique; appelons enfin h le plan qui est la trace de l'espace H sur le nôtre.

Les deux coniques de **S** qui sont dans l'espace H ont pour projections deux coniques situées dans le plan h et se coupant sur les deux points a, b, projections de α, β. Donc, en ne retenant de toute la figure que les choses qui sont dans notre espace :

La surface Σ (c'est-à-dire la surface du quatrième degré à conique double, de construction générale) contient un nombre ∞^1 de coniques qui se rangent en cinq systèmes; les coniques de chaque système s'associent elles-mêmes deux par deux situées dans un même plan qui enveloppe un cône de second degré k; des quatre points d'intersection de ces deux coniques formant couple, il y en a deux sur la conique double, et les deux autres a, b sont sur la génératrice de contact du plan avec le cône; *la génératrice et le plan sont donc tangents à la surface Σ en chacun de ces deux points et, comme la génératrice est quelconque, le cône est bitangent à la surface.*

Les deux cônes k ainsi définis s'appellent *les cônes de Kümmer*. Ils ont été découverts en 1863 par le savant dont ils portent le nom, lequel les publia dans les *Monatsberichte* du 16 juillet; presque en même temps, Moutard les découvrait de son côté et les publiait dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1864.

Voici la démonstration de Kummer. On verra comme elle est peu explicative et peu suggestive et, si l'on se rappelle quel puissant instrument a été la méthode des projections en reliant

les figures planes à celles de l'espace, on appréciera l'utilité d'un champ supérieur permettant à celles-ci de recevoir à leur tour les services qu'elles ont rendus au-dessous d'elles.

En appelant, dit Kummer, φ et ψ des fonctions rationnelles entières du second degré de trois coordonnées x, y, z et p une fonction linéaire des mêmes coordonnées, l'équation la plus générale des surfaces de quatrième degré qui ont une conique double est

$$\varphi^2 + 4p^2\psi = 0;$$

on peut encore l'écrire

$$(\varphi + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2),$$

λ étant une constante arbitraire. Si l'on détermine cette constante par la condition que l'équation du second degré

$$\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0$$

représente un cône, celui-ci enveloppera doublement la surface du quatrième degré, en ce sens que chacun de ses plans tangents la touchera deux fois; de plus, il la coupera suivant un couple de coniques. La condition pour que l'équation du second degré représente un cône est facile à développer et est du cinquième degré; donc il y a cinq cônes bitangents.

Nous avons déjà dit, dans le paragraphe précédent, que les *cyclides* sont des surfaces Σ ayant pour conique double *le cercle imaginaire à l'infini;* elles ont aussi cette propriété caractéristique que les deux coniques d'intersection des plans bitangents (plans tangents aux cônes de Kummer) sont particularisées en *deux cercles.*

Dans la cyclide de Dupin, quatre des cônes de Kummer sont dégénérés en quatre plans tangents singuliers (plans touchant la surface suivant une courbe).

III. — Décomposition de la conique double en deux droites.

Dans le cas général, la surface Σ de notre espace, surface du quatrième degré ornée d'une conique double, a donc un cortège de cinq cônes de Kummer, dont la présence vient de ce que Σ est la projection de la surface **S**, intersection de deux hyperqua-

driques; et voici, en résumant ce qui précède, comment cette conséquence se produit. De même que par l'intersection de deux surfaces du second degré il en passe une infinité d'autres contenant quatre cônes quadriques, de même il passe par S une infinité d'autres hyperquadriques parmi lesquelles se trouvent cinq cônes hyperquadriques : chaque cône de Kummer correspond à l'un d'eux et est tout simplement la projection du cône quadrique commun à ce cône et à son espace polaire par rapport au centre de projection. Quant à la propriété qu'ont les plans tangents des cônes de Kummer d'être des plans bitangents de la surface Σ et de la couper suivant deux coniques, elle vient de ce que chacun d'eux est à la projection commune de deux plans générateurs de séries différentes d'un cône hyperquadrique, dont les espaces projetants confondus sont tangents à S.

Il suit de cette filiation entre les surfaces S et Σ que la famille des secondes est dominée tout entière, comme l'est celle des premières, par le Tableau des caractéristiques issues du théorème de Weierstrass (p. 170). La discussion, que nous n'avons pas faite mais que nous aurions pu faire, du cachet particulier que chaque caractéristique imprime aux formes et aux propriétés des surfaces S, se refléterait sur les surfaces Σ et fournirait tout ce que la Géométrie peut dire sur leur compte. Nous avons même ici plus de richesses que n'en a la Géométrie à quatre dimensions, car, en faisant varier la position du centre de projection, nous créons des sous-familles qui lui sont inconnues.

Plaçons-le, par exemple, non plus en un point quelconque de l'étendue, mais en un point p d'un des cônes ω, dont soit σ le sommet. L'espace tangent au cône en ce point est en même temps l'espace polaire P de celui-ci, et la figure commune à ω et à P se réduit à deux plans générateurs dont l'intersection est $p\sigma$. La quartique S se décompose en deux coniques de ces plans; celles-ci sont projetées suivant deux droites d_1, d_2 dont chaque point est une projection double. *La conique double de Σ est elle-même décomposée en deux droites doubles.*

Comme on peut mener de p deux tangentes à chacune des deux coniques, il y a sur chaque droite double deux points-pince, et il n'y a rien à changer à ce qui a été dit plus haut de ces points singuliers. Les deux plans générateurs qui passent par p et qui

coupent notre espace suivant les droites doubles d_1, d_2 de Σ, et les espaces projetants des divers couples de plans générateurs, ont pour traces les deux faisceaux de plans passant par ces deux droites; ils contiennent deux des séries de coniques de Σ et il n'y a plus que quatre cônes de Kummer proprement dits, le cinquième se réduisant au couple des deux droites doubles considérées comme enveloppes de ces plans.

IV. — Droite bidouble et conique cuspidale.

Nous passons maintenant aux cas, exclus jusqu'ici, où le faisceau $\varphi\psi$ contient un cône de seconde espèce, ou deux. On se rappelle qu'un pareil cône ϖ contient un ∞^1 de plans générateurs formant une seule série et passant tous par une arête a, lieu de sommets; ces plans coupent la surface **S** en ∞^1 coniques formant de même une seule série et passant par les points d'intersection de l'arête a avec **S**, qui sont au nombre de deux, distincts ou non (à moins qu'ils ne soient en nombre infini, cas dont nous allons nous débarrasser tout d'abord). Ce sont toujours *des points doubles de* **S**; nous les désignerons par m, m'.

Si nous plaçons sur le cône ϖ le centre de projection p, les deux droites doubles que nous venons de voir se réunissent en une seule qui, sous le nom de *droite bidouble,* donne naissance à une nouvelle famille de surfaces Σ, où seront représentées encore les diverses caractéristiques autres que celles de la première ligne du Tableau. Il peut arriver que l'arête soit tout entière sur la surface **S**; alors les plans générateurs de ϖ coupent **S** suivant cette arête et une autre droite, de sorte que la surface contient, non plus ∞^1 coniques proprement dites, mais ∞^1 droites appuyées sur l'arête : c'est une *surface réglée* et il en est de même de la projection Σ.

Replaçons désormais notre centre de projection sur une hyperquadrique du faisceau de construction générale, mais toutefois dans une position particulière telle qu'il soit sur le plan polaire A de l'arête a par rapport à cette hyperquadrique χ. Alors l'espace E tangent à celle-ci en p passe par a et les deux points m, m' de **S** sont projetés en deux points d, d' de la conique double γ; on voit aisément qu'en chacun de ces points singuliers

une section plane a un contact de deux branches : deux points-pince s'y sont réunis.

Nous pouvons particulariser la position du centre de projection sur le plan A en l'amenant en un des points de ce plan qui sont communs à χ et à la conique polaire de π par rapport à χ, en sorte que l'espace E tangent à χ en ce point soit aussi tangent à ϖ le long d'un certain plan générateur G. Voici ce qui arrivera :

Le plan P qui, au début du présent paragraphe, était le plan polaire de p par rapport à la surface **S**, n'est autre chose maintenant que le plan G, car celui-ci appartient à la fois aux espaces polaires de p par rapport à deux hyperquadriques, χ et ϖ, du faisceau. Comme alors P coupait **S** en quatre points dont les projections étaient les quatre points-pince de la conique double γ, et que dans le cas actuel toute cette courbe se trouve sur P, tous ses points sont maintenant des points-pince et la conique double γ est remplacée par une *conique cuspidale,* etc. L'espace E qui, au début, touchait la surface **S** suivant une courbe quartique Γ dont γ était la projection, ne fait plus que toucher cette surface suivant une conique G dont χ est la projection.

Nous avons rencontré dans le paragraphe précédent, sans sortir de notre espace, un exemple de conique cuspidale : le cas 2°, page 177.

On verrait sans beaucoup de peine qu'il y a un contact de deux branches aux deux points de χ qui sont les projections des points doubles m, m' et **S** : ce sont des *points-clos*, points de changement de sens du rebroussement cuspidal.

Quant aux cônes de Kummer, il n'y en a plus que trois au maximum, puisque leur existence est subordonnée aux cônes de première espèce présents dans le faisceau.

Le Tableau des caractéristiques (p. 170) nous fournirait encore la classification de la dernière suite de surfaces que nous venons de parcourir et dans laquelle se rencontrent des associations que nous n'avons pas nommées, telles que : deux droites cuspidales, une droite double et une droite cuspidale, etc. C'est à la forme (11)(11)1 que se rapporte la *cyclide de Dupin* (p. 180).

CHAPITRE VIII.

LA QUESTION DE L'EXISTENCE RÉELLE DE L'HYPERESPACE.

§ 47. — Argument philosophique.

Rien n'existe en dehors de l'esprit qui conçoit, disent certains philosophes qui n'admettent aucune objectivité, pour lesquels toutes nos sensations, y compris celles d'espace et de temps, ne sont que nos propres manières d'être, et pour lesquels les causes mêmes de ces sensations n'existent qu'en nous.

Tout ce qui n'implique pas contradiction existe, l'absurde seul est irréel, disent d'autres, qui ont à leur tête Leibniz et Hegel et paraissent plus raisonnables. Pour eux, le quatrième champ existe forcément, car il n'est contradictoire ni avec lui-même, ni avec aucun des faits ou principes déjà consacrés. De quelque manière que l'on conçoive notre espace, qu'on en fasse une chose subjective ou une donnée du monde extérieur, ce quatrième champ en partage la nature et en est une simple extension, comme sa Géométrie est le prolongement de la vieille Géométrie euclidienne. Le fait que nous ne voyons pas la fameuse quatrième perpendiculaire n'est nullement une raison pour la repousser, tellement le témoignage de nos sens est suspect (*voir* plus loin p. 200).

Nous contentant de soumettre cet argument aux réflexions du lecteur, nous allons lui présenter successivement les principales raisons d'ordre mathématique ou physique qui ont été données pour croire à l'existence de cette quatrième perpendiculaire. Les premières font l'objet du paragraphe 48 et les secondes des paragraphes 49 à 53.

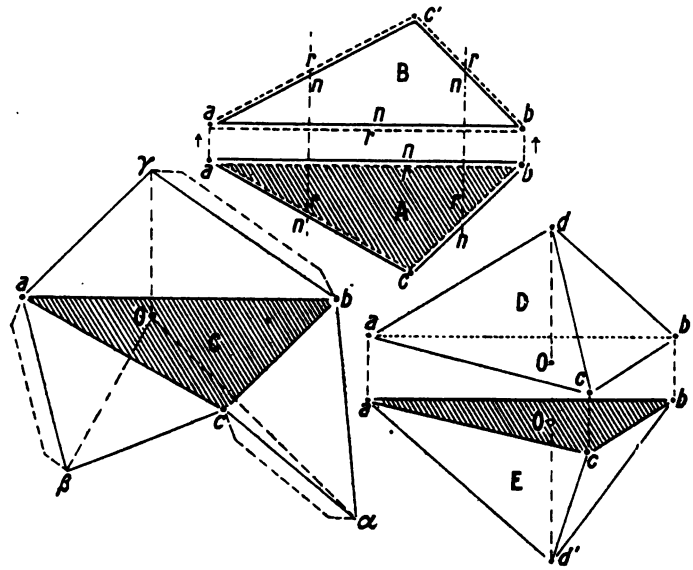
§ 48. — L'argument des polyèdres symétriques.

I. Il y a des faits, dans la Géométrie à deux dimensions, qui s'expliquent *plus facilement* au moyen de celle à trois ; il suffit de prononcer les mots de *Géométrie projective*, de *section conique*... pour qu'une foule d'exemples justifiant cette proposition se présente aussitôt à l'esprit. Peut-être même y a-t-il des choses pour lesquelles la première *ne saurait* se passer de la seconde.

II. Il y a de même des faits dans la Géométrie à deux ou à trois dimensions, qu'on ne peut expliquer ou qu'on n'explique facilement qu'au moyen de celle à quatre. Nous en donnerons l'exemple suivant :

Lorsqu'on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle scalène, et qu'on veut le construire, on commence par *poser* un

Fig. 40.



Triangles et tétraèdres symétriques.

côté *ab* (*fig.* 40), puis on obtient par des recoupements d'arcs de cercle le sommet opposé *c* suivant qu'on fait la construction de

part ou d'autre de la ligne *ab* (au-dessous ou au-dessus dans la figure), on obtient deux triangles *abc* ou *abc'*, qui n'ont pas seulement leurs côtés égaux chacun, mais encore leurs angles, et que néanmoins on ne peut pas arriver à superposer en ne faisant faire aux triangles que des glissements ou des rotations dans le plan commun. On dit qu'ils sont *symétriques*. La figure 40 représente ces deux triangles; pour qu'elle soit lue plus facilement, nous les avons un peu écartés l'un de l'autre, et le lecteur devra considérer les deux lignes parallèles marquées *ab* comme n'en faisant qu'une.

La superposition devient possible si l'on ne s'astreint pas à ce que les deux triangles restent dans le même plan, et si, les considérant comme étant sur deux plans superposés, on fait tourner de 180° celui de l'un deux, le premier par exemple, autour d'une droite quelconque de ce double plan. Nous choisirons le côté *ab* lui-même pour axe de rotation; alors *abc* se trouve de suite appliqué sur *abc'* une fois la demi-révolution accomplie.

Quelle modification ce passage par le troisième champ a-t-il apportée dans le triangle *abc* pour que, n'étant pas auparavant superposable à *abc'*, il le soit lorsqu'il se retrouve dans le plan primitif, après le demi-tour?

Pour nous en rendre compte, supposons que chaque côté du triangle *abc* ait *deux bords de couleur différente :* l'un extérieur, que nous supposerons *noir,* que nous désignerons par la lettre *n*, et qui a été dessiné sur la figure en traits pleins ; l'autre intérieur, que nous supposerons *rouge,* que nous désignerons par *r*, et qui a été tracé en traits pointillés. Alors on voit tout de suite que, lorsque le triangle *abc* a accompli son demi-tour et est venu en *abc'*, le trait plein et le trait pointillé, les deux lettres *n* et *r*, les deux couleurs se sont mutuellement remplacés; le triangle a été *retourné,* en attachant à ce mot le même sens que quand on dit : *retourner un gant.* Voilà pourquoi il est devenu superposable à son symétrique.

III. Construisons trois autres triangles $a\gamma b$, $b\alpha e$, $c\beta a$, un sur chaque côté du triangle *abc*, et tel que l'on ait

$$(1) \qquad a\gamma = a\beta, \qquad b\alpha = b\gamma, \qquad c\beta = c\alpha,$$

c'est-à-dire que les deux longueurs partant d'un même sommet soient égales entre elles. Si nous faisons tourner chaque nouveau triangle autour du côté qui lui est commun avec le premier, en les amenant tous les trois *au-dessus* du plan *abc*, les six droites (1) se réuniront par deux en trois arêtes, et les trois points α, β, γ se réuniront en un seul sommet que nous appellerons d; nous avons formé un *tétraèdre abcd*. Nous en aurions un autre *abcd'* si nous avions amené les trois triangles mobiles *au-dessous* du plan *abc*. Ces deux tétraèdres ont tous leurs éléments égaux chacun à chacun, mais ils ne peuvent pas être superposés, nous verrons tout à l'heure pourquoi; on dit encore qu'ils sont *symétriques*. Il est clair, par la construction, que les côtés du papier qui, chez l'un, sont tournés vers le dedans, regardent le dehors chez l'autre (1).

Mais les deux tétraèdres *abcd*, *abcd'* deviennent superposables *si l'on fait tourner de* 180° *l'espace de l'un, abcd, autour du plan commun abc*. On a vu, dans le *Traité élémentaire,* que c'est cette rotation qui remplace, dans l'étendue, celle que nous connaissons. Pendant qu'elle s'accomplit, tous les points du plan demeurent immobiles, et en particulier les trois points a, b, c; le point d, sortant de suite de l'espace *abcd'*, décrit une demi-circonférence dans le plan qui est *absolument perpendiculaire* au plan *abc*, et qui n'a de commun avec lui que le point O en lequel le perce la droite dd'. Le demi-tour accompli, le point d arrive en d' et les deux tétraèdres coïncident, puisque a, b, c ont été tout le temps des sommets communs. *Chaque face* du tétraèdre *abcd* a été *retournée* comme l'avait été tout à l'heure *chaque côté* du triangle *abc*, et c'est pour cela que la coïncidence a lieu.

Dans le *Traité élémentaire* (§ 31) nous avons appliqué le calcul au cas d'une sphère creuse et montré qu'un demi-tour dans l'étendue, ou tout mouvement équivalent, a encore pour effet de la retourner, sa surface intérieure devenant extérieure, et réciproquement. Le fait est général (2). Vous pouvez retourner un

(1) Les *languettes* placées le long des côtés $a\beta$, $c\alpha$, $b\gamma$ sont destinées à être collées sous les faces contre lesquelles ces arêtes viennent s'appliquer.

(2) Un récit du romancier anglais Wells est bâti sur cette donnée : *The Plattner Story,* collection Tauchnitz, vol. 3426. Projeté dans l'étendue par un accident qui n'a guère d'autre exemple, M. Plattner en est revenu *retourné :* le cœur à droite, etc.

gant parce qu'il a une ouverture et qu'il est fait d'une étoffe flexible; si l'ouverture était cousue, si l'étoffe était rigide, vous le retourneriez en faisant tourner de 180°, autour d'un plan quelconque de l'espace, la portion d'espace qui le contient.

Pour revenir au tétraèdre, la différence entre le résultat d'une demi-rotation *dans l'étendue autour du plan abc* et celui d'une demi-rotation *dans l'espace autour d'une droite ab* (par exemple), vient de ce que, dans le premier cas, les *trois* points *a*, *b*, *c* sont immobiles; dès lors l'effet est le même que si, le triangle *abc* étant ouvert et rigide et le reste du tétraèdre étant flexible (tel un filet à papillons dont l'ouverture serait triangulaire), le point *d* venait en *d'* en glissant le long de la droite *dd'* et traversant le plan *abc*. Dans l'autre cas, deux points seulement, *a* et *b*, sont immobiles; les côtés des triangles, réunis par deux sur les arêtes du tétraèdre, sont retournés comme nous l'avons dit plus haut et chaque triangle, tel que A, est remplacé par son symétrique B; mais les *plans des faces* ne sont pas retournés, et c'est pour cela que la coïncidence n'a pas lieu; il est d'ailleurs impossible de trouver *dans l'espace* un mouvement ou une combinaison de mouvements qui produise ce résultat.

On se rend compte aisément de ces diverses circonstances en dessinant la figure C sur de la *carte* faite avec *deux feuilles de papier de couleur différente,* et exécutant, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre, la rotation des trois triangles qui doivent devenir les faces du tétraèdre.

IV. Voilà donc deux figures dont tous les éléments sont égaux chacun à chacun, et qui ne peuvent être mises en coïncidence que par la rotation, ou quelque mouvement équivalent, de l'une d'elles dans le champ supérieur, savoir : le champ du troisième degré pour les deux figures planes, celui du quatrième degré pour les deux figures de l'espace. Cette nécessité de l'intervention du champ supérieur pour amener un résultat aussi simple ne peut-elle pas être considérée comme une raison suffisante pour croire à son existence?

Bien entendu, les polyédroïdes (*voir* Chap. II), symétriques sans être réguliers, qu'il y a dans l'étendue ne peuvent à leur tour être mis l'un sur l'autre que par une demi-rotation accom-

plie dans le champ supérieur (c'est autour *d'un espace* qu'elle aurait lieu cette fois); *et ainsi de suite.*

Rapprochons de cet exemple celui du Chapitre V et celui du Chapitre VI. Le premier nous a montré des faits épars de *notre* monde géométrique se masser, en se simplifiant et se synthétisant dans une figure de l'étendue, celle de six espaces. Dans le second, nous avons vu éclore, d'une figure de l'étendue, *l'intersection de deux hyperquadriques,* des théories qui font autant de chapitres de la Géométrie à trois dimensions. Toujours le géomètre voit de même le premier, le second, le troisième et le quatrième champ former un seul tout; les lignes, les surfaces, les hypersurfaces, les hypercorps échanger des relations continuelles; les premières circonscrire des portions des secondes qu'il appelle *des aires,* les secondes, des portions des troisièmes qu'il appelle *des volumes,* les troisièmes, des portions des quatrièmes qu'il appelle *des hypervolumes.* Chaque fois, il distingue un *contenant* et un *contenu,* et les mesure respectivement au moyen d'unités qui sont, dans le premier cas, *le mètre* élevé aux puissances 1 et 2; dans le second, le même mètre élevé aux puissances 2 et 3; dans le troisième, le même mètre élevé aux puissances 3 et 4. Tout autour de lui les deux premiers cas se réalisent en foule : des lignes entourent des surfaces qui, à leur tour, se moulent sur des volumes. Pourquoi, dit le partisan de la réalité de l'hyperespace, pourquoi donc le reste de l'harmonieux édifice s'écroulerait-il sitôt qu'il lève les yeux de dessus son épure?

Helmholtz et Riemann croyaient à cette réalité, et les savants d'aujourd'hui qui l'admettent ne sont pas rares. Voici ce que dit Taine, dont la pensée est ici flottante et difficile à saisir (1); nous citons le passage entier, bien qu'il soit un peu long et que *le second alinéa seulement* se rapporte à la question actuelle, mais le premier intéresse une question qui viendra dans un prochain paragraphe, où nous n'aurons plus à le reproduire.

Pour construire l'espace, nous avons d'abord supposé un point qui se meut vers un seul et unique autre point, et nous avons ainsi fabriqué la ligne droite; nous avons ensuite supposé que cette droite se mouvait en traçant

(1) *De l'intelligence,* 5e édition, t. II, 1888, p. 376.

par tous ses points des droites égales entre elles, et nous avons ainsi fabriqué la surface plane; nous avons enfin supposé que cette surface se mouvait en traçant par tous ses points des droites égales entre elles, et nous avons ainsi fabriqué le solide géométrique ou l'espace complet. Mais rien ne prouve que ces mouvements supposés par nous soient possibles dans la nature. Si, par quelque nécessité inconnue, les droites qu'on vient d'énumérer étaient et devaient être toujours infléchies, nos constructions mentales n'auraient pas et ne pourraient pas avoir de correspondantes effectives; l'espace réel aurait une ou plusieurs courbures que notre espace idéal n'a pas, et, pour que la courbure échappât forcément à nos observations, il suffirait qu'elle fût très petite. Tel est peut-être le cas; il n'y aurait qu'une ressemblance approximative entre notre espace et l'espace physique. Nous avons beau connaître la structure du réceptacle hypothétique que nous avons forgé; nous n'en pouvons pas déduire la structure du réceptacle indépendant dans lequel les corps se meuvent.

De même, dans le réceptacle fictif, au delà de la troisième dimension, nous ne pouvons en imaginer une quatrième : cela ne prouve pas que, dans le réceptacle réel, il n'y en ait pas une quatrième. Tout au rebours : il y a même des indices en sens contraire; car, si l'on ne peut imaginer géométriquement une quatrième dimension, on peut l'exprimer algébriquement, grâce à l'analogie des dimensions et des puissances, et la vraie raison que nous avons pour refuser à l'espace réel la quatrième dimension est encore une analogie. Dans l'espace réel, chaque dimension est influente. Placez des corps pesants sur une ligne droite, c'est-à-dire selon la première dimension : ils se meuvent d'une certaine manière. Placez un autre corps pesant hors de la ligne droite, dans le plan, c'est-à-dire selon la seconde dimension; le mouvement des corps situés sur la ligne droite se modifie. Placez enfin un dernier corps hors du plan, c'est-à-dire selon la troisième dimension; le mouvement des corps situés sur le plan se modifie encore. Ayant la même nature, la quatrième dimension aurait la même influence; si elle existait, dans le mouvement des corps pesants observé et calculé selon les trois premières dimensions, nous trouverions des perturbations que nous n'y trouvons pas.

Taine pense évidemment au *problème des trois corps,* mais il ne tient pas compte de l'*immensité;* éloignez suffisamment vos trois corps les uns des autres, chacun d'eux suivra sa voie comme s'il était seul. Sans sortir de notre espace, nous voyons le système solaire au milieu d'un vaste désert et les choses qui se passent aux confins de ce désert, par exemple dans le système de Sirius, ont bien peu d'influence sur nous. Or, il part de l'endroit où nous sommes un ∞^3 de directions qui font ensemble l'étendue, et dont

les deux tiers (un ∞^2) font ensemble notre espace; pourquoi la solitude qui règne le long de ces dernières jusqu'à une aussi grande distance ne régnerait-elle pas aussi le long de celles qui composent l'autre tiers?

C'est par une raison de ce genre que les adeptes de la quatrième dimension expliquent pourquoi nous ne voyons pas d'hypercorps traverser notre espace; encore, leur est-il loisible de considérer comme tels certains phénomènes d'explication difficile et de vérification impossible, par exemple les étoiles temporaires.

§ 49. — Molécule et atome.

I. Qu'est, au fond, cette chose dont l'image renversée se peint sur notre rétine et que nous appelons *un corps matériel,* par exemple un morceau de fer ou une masse d'eau?

Toutes les théories en faveur aujourd'hui la considèrent comme l'agglomération d'une multitude de choses plus petites qui, sous le nom de *molécules,* ont *une constitution analogue.* Bien trop petites pour tomber sous nos sens, extrêmement petites même par rapport aux intervalles qui les séparent, exerçant les unes sur les autres des actions attractives ou répulsives qui maintiennent leurs distances dans certaines limites, animées avec cela de vitesses propres considérables, les molécules sont dans un état incessant d'agitation, de chocs, de déviations et de déformations.

Ce sont ces mouvements qui produisent les phénomènes de la lumière, de l'électricité, etc. Ils sont susceptibles d'être transmis par le milieu ambiant (air, éther ou autre chose) aux molécules faisant partie d'autres agglomérations. Si le récepteur provisoire est un de nos organes, et si certaines conditions d'amplitude et de rapidité se trouvent réalisées, nous en éprouvons, par une traduction mystérieuse, les sensations du tact, du son, de la vision, de la chaleur, etc. Ce que nous appelons la surface des corps n'est donc pas la chose continue que nous croyons voir, mais l'enveloppe idéale en dedans de laquelle les molécules s'agitent, pareilles à ces masses tourbillonnantes que les moucherons forment parfois au coucher du soleil et qui indiquent, dit-on, une belle journée pour le lendemain. Idéale aussi est la notion de *volume*

que nous associons à cette apparence, et que nous nous figurons avec trois dimensions.

Mais que sont les molécules elles-mêmes?

Analogue au corps dont elle contribue à former l'apparence, et agitée aussi par des vibrations intestines, chacune est l'agglomération d'une multitude d'autres choses beaucoup plus petites qu'elle-même; chacune de ces choses est constituée à son tour de la même manière, et ainsi de suite.

Si nous nous retournons et regardons dans le sens opposé, nous voyons dans le même corps matériel pris comme exemple au début de ce paragraphe l'origine d'une série ascendante dont les termes successifs, de plus en plus grandioses, seront le globe terrestre, le système solaire, etc. *Cela fait avec la série précédente une seule et même série.* Le mathématicien peut avoir à considérer un terme quelconque de cette vaste série, et il n'a besoin pour ses calculs, en outre des termes qui sont sur le même rang que celui-là, que d'un très petit nombre de ceux qui sont au-dessus ou au-dessous : *un ou deux au plus.* Les autres n'ont pas d'influence appréciable, ceux-ci à raison de leur éloignement, ceux-là à raison de leur petitesse; il dit *qu'il les néglige* et, ce mot une fois prononcé, ils n'existent plus pour lui. Il considère les plus petites agglomérations auxquelles il s'est arrêté comme les éléments des corps, et il les appelle *atomes,* en dépit de la signification du mot, qui est : *indivisible.*

II. Plus scrupuleux, le métaphysicien *ne veut pas* simplifier ainsi les choses. Il lui faut voir *le bout* des deux séries, et il se trouve dans cette alternative, ou d'admettre qu'elles se prolongent *à l'infini,* ou de leur assigner *un dernier terme.* Si nous prenons d'abord la seconde alternative, ce dernier terme serait, d'un côté, l'*atome* proprement dit, surface fermée sur elle-même, impénétrable, immuable dans sa forme, au dedans de laquelle nous ne voulons pas jeter les yeux; de l'autre, une enveloppe infranchissable, repoussant vers l'intérieur tout ce qui arriverait à elle, et hors de laquelle nous ne regarderons pas davantage. Mais l'infini n'est ainsi supprimé qu'en apparence, car, en nous en tenant à l'atome et à la considération qui se présente la première, le mot *impénétrable* veut déjà dire : résistance *infinie* à la pénétration.

Il est d'ailleurs bien malaisé de se représenter ce que peut être un pareil objet : l'atome. Nous ne pouvons pas le comparer aux corps solides que nous voyons, car de toutes les propriétés qui nous le définissent : l'étendue (1), la dureté, la mollesse, l'éclat, la couleur, la densité, la malléabilité, la flexibilité, l'élasticité, la sonorité, la dilatabilité, la ténacité, la fragilité, la beauté, la laideur, etc. la première, cet attribut que nous représentons avec trois dimensions, semble seule pouvoir lui être appliquée. Encore n'est-ce pas l'avis de certains penseurs. Même l'opinion la plus en faveur aujourd'hui parmi les mathématiciens et les philosophes la supprime purement et simplement, en faisant de l'atome un *point géométrique,* siège des diverses activités que nous sommes obligés de lui supposer, et dont la visibilité des corps, leur masse, etc., sont des résultantes. Il n'existerait ainsi dans l'univers que des éléments dynamiques, dont les directions concourraient par groupes en des *points géométriques,* qui seraient *les atomes,* c'est-à-dire les éléments des corps (2).

Peut-être plus incompréhensible *à première vue,* mais plus plausible et moins affligée de contradictions, est la première alternative, laquelle implique l'existence physique de l'*infini,* en petitesse comme en grandeur.

Dans tous les cas, qu'il y a loin du morne univers que la Science nous révèle, constitué uniquement par les va-et-vient de corpuscules incapables d'occasionner individuellement la moindre sensation visuelle ou autre, aux images riantes ou sombres qui nous charment et nous troublent tour à tour! Si la Science dit vrai, combien nos sens sont des témoins suspects!

III. Nous donnons pour théâtre à ces phénomènes une entité

---

(1) Inutile de dire que l'acception donnée au mot *étendue,* dans ces quelques lignes, n'a aucun rapport avec celle que nous avons adoptée comme synonyme des mots *quatrième champ.*

(2) L'idée de l'atome inétendu fut mise en avant par le P. Boscowich vers le milieu du XVIII^e^ siècle (*Theoria philosophiæ naturalis reducta ad unicam legem virium in natura existentium,* Vienne, 1758). On peut citer parmi ses partisans : Ampère, Faraday, Cauchy, de Saint-Venant, Dugald Stewart, Victor Cousin, Vacherot, etc. *Voir,* par exemple, un Article de ce dernier, dans la *Revue des Deux-Mondes* du 15 août 1876, p. 55.

que nous appelons *l'espace,* et dont nous faisons un *champ de troisième degré.* On sait combien est frêle la base sur laquelle notre esprit s'appuie pour le classer ainsi. En tout cas, il est naturel, faisant pour lui la même chose que pour le corps matériel, de le considérer comme un terme d'une série commençant par le point, arrivant à lui par la droite et le plan, puis se continuant indéfiniment. Une pareille manière de voir n'est ni moins rationnelle, ni plus incompréhensible, ni plus gratuite que celle qui, à la base même de la Physique, fait état de l'infiniment petit et de l'infiniment grand.

Il a été montré, dans le *Traité élémentaire,* par un certain nombre de faits, que cette conception est utile au moins pour la *Théorie atomique,* qui s'est heurtée à des choses non exprimables par des fonctions ne contenant que les trois coordonnées de l'espace. La quatrième perpendiculaire ferait ainsi son entrée dans la Physique par le monde des molécules. Les petites agglomérations qui forment le premier terme pratique de la série définie plus haut jouiraient de quatre dimensions, mais leurs groupements en agglomérations d'ordre supérieur qui impressionnent nos sens ne se feraient que suivant les trois dimensions auxquelles nous sommes habitués; tel, en descendant d'un degré, un mur dont nous ne voyons que la façade, mais dont chaque brique n'en a pas moins une dimension perpendiculaire à cette façade. Tous les corps auraient donc dans le sens perpendiculaire à notre espace une épaisseur de l'ordre des grandeurs atomiques. Cependant notre existence serait purement tridimensionnelle, parce que, même en nous supposant capables de la conception quadridimensionnelle, nous ne saurions avoir conscience d'une grandeur de cet ordre. Diverses déductions paraissant assez plausibles placent en effet le diamètre moléculaire de la plupart des substances connues entre *un millionième et un dix-millionième de millimètre,* alors que nos plus puissants microscopes ne vont pas jusqu'au *dix-millième de millimètre.*

§ 50. — Argument tiré de l'atome plurivalent.

Citons encore un fait en confirmation des affinités qu'il y a entre l'atome et la quatrième dimension; nous espérons qu'on ne

trouvera pas trop longue l'explication préliminaire dont nous sommes obligé de l'accompagner, plus encore, peut-être, pour faciliter notre propre tâche que celle du lecteur.

I. Nous ne nous sommes pas inquiété, dans le paragraphe précédent, de la distinction que fait la Chimie entre *corps simples* et *corps composés,* mais il nous faut y arriver. Chez les premiers, la molécule est constituée par des atomes identiques, d'espèce particulière pour chacun d'eux, et le nombre des espèces différentes serait d'environ quatre-vingts, indiqué par celui des corps simples connus. La molécule des seconds est édifiée avec les mêmes espèces d'atomes, mais il s'en trouve dans chacune *au moins deux* d'espèces différentes. Les diverses espèces étant désignées par A, B, C... et m, n, p... étant des nombres entiers pris comme *multiplicateurs,* tout corps composé est donc représenté par un *symbole* tel que

$$A^m B^n C^p \ldots$$

qu'on appelle sa *formule brute,* parce qu'il n'implique aucun mode particulier d'association et laisse la porte ouverte à toutes les suppositions. Oubliant les considérations *gratuites* qui y ont conduit le chimiste ne voit plus que ce symbole qui, avec les signes A, B, C... et un très petit nombre de valeurs de m, n, p..., lui permet de représenter la masse colossale des corps composés auxquels il a à faire, d'interpréter et de prévoir les phénomènes qui naissent de leurs rapprochements.

Dans les substances qui font l'objet de la Chimie organique, un de ces constituants est toujours le *carbone,* et il s'y présente comme *quadrivalent,* on disait il n'y a pas longtemps encore : *tétratomique* (1). Cela veut dire que sa puissance de combinaison n'est épuisée que lorsqu'il est associé dans la molécule à quatre autres *atomes* ou *groupements d'atomes,* apportant chacun une *valence,* mot qui désignerait une force de nature particulière, douée d'orientation et de sens. On donne à un pareil groupement

(1) On peut voir l'histoire du mot au paragraphe 93 de l'Ouvrage : LOTHAR MEYER, *Les théories modernes de la Chimie et leur application à la Mécanique chimique,* 2 vol. in-8°, 1887.

d'atomes le nom de *radical;* on se le représente comme *un corps composé ordinaire diminué d'un atome,* fiction n'ayant pas d'existence réelle, mais censée apparaître un instant dans le passage entre les deux états d'équilibre stable qui précèdent et suivent une réaction chimique.

Voici, par exemple, le *gaz des marais,* appelé aussi *méthane, hydrure de méthyle, hydrogène protocarboné,* etc.; c'est le carbure fondamental de la Chimie organique. C'est lui qui, accumulé au fond des galeries des mines de houille et s'enflammant par une cause quelconque, y détermine ces explosions si redoutées des mineurs sous le nom de *feu grisou.* Il a pour formule CH^4, et les quatre valences de l'atome de carbone y sont saturées par celles de quatre atomes d'hydrogène, qui est un corps monovalent. On peut remplacer dans sa formule les quatre H par d'autres atomes ou groupements univalents X, Y, Z, V et, suivant que quatre, trois, deux ou *zéro* de ceux-ci sont identiques, elle donne naissance à ces quatre formes :

$$CX^4,\quad CX^3Y,\quad CX^2YZ,\quad CXYZV,$$

le cas où le carbone lui-même se trouverait parmi les quatre atomes apportés étant exclu provisoirement.

Tous les composés de la dernière forme, et ils sont nombreux, *jouissent, à l'exclusion de tous ceux des trois autres, de la curieuse propriété que voici.* Chacun d'eux présente *deux variétés* qui ont absolument la même composition chimique; mais, si l'on place sur le trajet d'un rayon de lumière polarisée une cuve de verre contenant une des variétés à l'état liquide, de dissolution ou de vapeur, le plan de polarisation tourne *de gauche à droite* autour du rayon; si c'est l'autre variété, il tourne de *droite à gauche,* et du même angle. On dit que la première variété est *droite* ou *dextrogyre,* que la seconde est *gauche* ou *lévogyre,* et que les deux variétés sont *isomères* [1] l'une de l'autre. Leur mélange est *inactif,* c'est-à-dire sans action sur le rayon lumineux.

A première vue, on pourrait croire à l'identité du phénomène avec celui que présentent divers cristaux. Mais dans le dernier

---

[1] De *isos,* égal; *meros,* partie.

cas, le phénomène est dû à une dissymétrie cristalline (1) et ne peut pas être conçu en dehors de l'*état solide;* dans celui qui nous occupe, il est clair que c'est la molécule elle-même qui est organisée dissymétriquement, soit dans *la position relative de ses constituants,* soit dans *leurs mouvements intestins.* La seconde alternative a été abandonnée comme plus difficile ou moins intéressante, et l'on s'est attaché à la première qui a conduit, dans ce dernier quart de siècle, aux principes étonnamment féconds de la *Stéréochimie.* Van't Hoff en Hollande, et Le Bel, en France, ont été les créateurs de cette science; Pasteur (2) en avait posé la première pierre.

Comment nous figurer cette molécule? Encore une fois, ce n'est pas après sa forme réelle (si tant est qu'il y ait quelque chose répondant à ce mot) que nous devons courir, mais après une forme schématique nous permettant d'interpréter le phénomène constaté, savoir : *la molécule en question est active vis-à-vis de la lumière polarisée quand tous ses termes sont inégaux, inactive quand deux, trois ou quatre des termes qui suivent* C *sont égaux.*

On eut bientôt vu qu'aucune figuration plane ne saurait faire l'affaire, et la figure la plus simple qu'on puisse prendre hors du plan est celle du *tétraèdre.* L'atome de carbone se trouvera à l'intérieur, et ses quatre valences sont dirigées vers les quatre sommets où elles se riveront aux quatre valences neutralisantes. Le tétraèdre sera régulier dans le cas CX^4 (*fig.* 41). Il ne le sera pas dans les autres cas, à raison des inégalités des forces dirigées par les molécules X, Y, Z, V non seulement vers C, mais encore les unes vers les autres; néanmoins, comme il ne s'agit que d'un schéma conventionnel, on peut conserver toujours le dessin régulier et commode de la figure 41. En interchangeant les lettres placées aux deux bouts d'une arête quelconque, il vient deux dispositions différentes toujours les mêmes (*fig.* 42), et il ne peut pas y en avoir davantage. C'est de ces deux dispositions qu'on dit

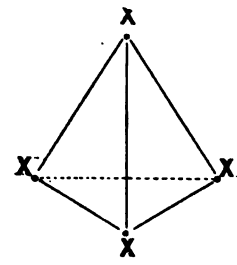
(1) La démonstration en a été donnée par M. Sarrau : *Mémoires sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux* (*Journ. de Liouville,* 2e série, t. XII et XIII, 1867 et 1868).

(2) *Recherches sur la dissymétrie moléculaire des produits organiques naturels,* Paris, 1861.

qu'elles sont *inverses sans être superposables*, et c'est cette conception qu'on a appelée le *carbone tétraédral* ou *asymétrique*.

On s'en rendra peut-être mieux compte en construisant le

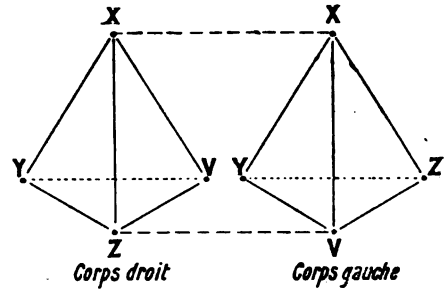
Fig. 41.



Tétraèdre de valences.

tétraèdre avec de la carte au moyen du développement que donne la figure 43 et teintant ses quatre sommets avec des couleurs différentes qui correspondront aux quatre corps X, Y, Z, V ; ce seront,

Fig. 42.



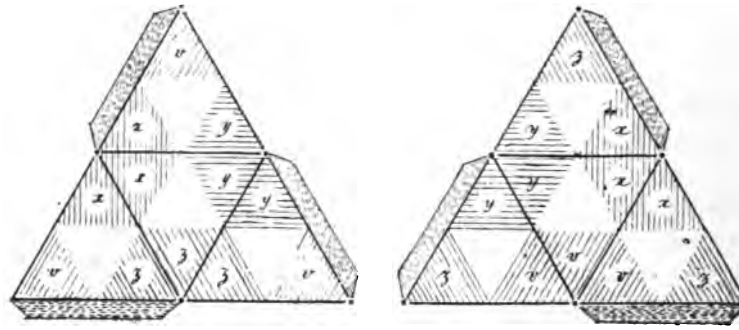
Tétraèdres de valences.

par exemple, le *bleu*, le *jaune*, et le *rouge*, le *vert*, que la figure représente par des hachures ayant quatre directions différentes. On voit de suite alors que les deux tétraèdres symétriques ne peuvent pas être superposés, mais qu'ils peuvent l'être si deux couleurs seulement sont les mêmes. Friedländer (1) emploie des

(1) Cité par Van't Hoff, *Leçons de Chimie physique*, traduit par Corvisy, 3 vol. in-8°, Paris, 1900.

modèles dans lesquels le tétraèdre est figuré par quatre tubes de caoutchouc partant d'un même point; des tiges de bois qu'on y enfonce et se terminant par une boule diversement colorée représentent les X, Y, Z, V.

Fig. 43.



Développement du tétraèdre de valences.

Toutes les fois qu'en prenant la formule brute d'un composé chimique où entre le carbone vous pouvez, ayant isolé *une fois* la lettre C, former avec les autres lettres quatre groupements *différents,* ce composé comporte deux variétés isomériques, optiquement inverses l'une de l'autre, dont la production ne sera qu'une affaire de laboratoire. Il se pourra toutefois qu'en procédant à cette production vous tombiez sur une substance inactive : c'est qu'elle se trouvera être un mélange en proportions égales des deux variétés, mais son dédoublement sera possible, grâce à trois méthodes principales dues à Pasteur.

Prenons, par exemple, l'*acide lactique* $C^3H^6O^3$. Si nous mettons de côté une lettre C, le reste donne quatre groupements

$$H,\quad CH^3,\quad OH,\quad CO^2H$$

auxquels s'applique tout ce qui a été dit ci-dessus de X, Y, Z, V. L'acide lactique comporte en effet deux variétés qui ont à peu près le même aspect de liquide sirupeux et incolore, mais différant par leur origine, leur constitution, quelques-unes de leurs réactions, la forme cristalline de leurs sels et le sens dans lequel elles dévient le rayon lumineux.

Or l'acide lactique dérive d'un autre appelé *acide propionique,*

qui a pour formule $C^2H^6O^2$. En retirant de celle-ci une lettre C, le reste donne ces quatre groupements

$$H,\quad CH^3,\quad H,\quad CO^2H,$$

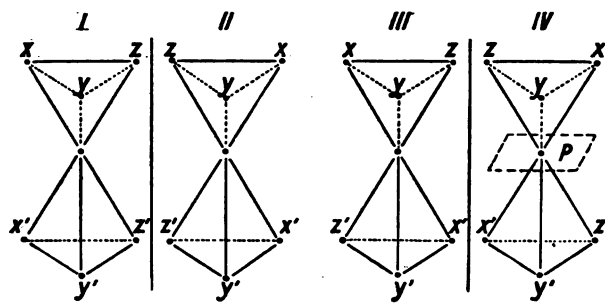
de la forme X^2YZ; aussi n'y a-t-il là ni isomérie ni pouvoir rotatoire.

II. Voyons maintenant le cas, laissé de côté jusqu'ici, où l'un des quatre constituants est *encore du carbone*. Cet atome arrive, lui aussi, avec son tétraèdre et échange une de ses valences avec le premier. Il faut imaginer que les deux tétraèdres se pénètrent réciproquement de sorte que chacun porte un sommet à l'intérieur de l'autre; mais les chimistes, dans leurs croquis, se contentent de faire toucher les deux pointes, comme le montre la figure 44. Quoi qu'il en soit, il reste trois valences sur chaque tétraèdre et en appelant X, Y, Z, X′, Y′, Z′ les six valences qui les neutralisent, la molécule a pour expression

$$CXYZ + CX'Y'Z'.$$

Si toutes sont différentes, on peut faire quatre figures symétriques non superposables : elles correspondent aux quatre manières dont un des deux termes XYZ, ZYX peut s'associer avec un

Fig. 44.



Liaison simple du carbone.

des deux termes X′Y′Z′, Z′Y′X′. Il existe donc alors quatre isomères, mais ce nombre se réduira plus ou moins s'il y a des égalités entre les X, Y, Z ou entre les X′, Y′, Z′.

On dit qu'une pareille molécule *contient deux carbones simplement liés.* Un exemple nous en sera fourni par *l'acide tartrique* $C^4H^6O^6$, qui se trouve dans ces croûtes épaisses et dures déposées par le vin et se présente, après préparation, sous la forme de gros cristaux prismatiques divisant à droite le rayon polarisé. La formule peut s'écrire, en entourant le carbone asymétrique :

$$\boxed{C}.H.CO^2H.OH + \boxed{C}.H.CO^2H.OH;$$

on voit que nous sommes ici dans un *cas particulier* consistant en ce que les termes afférents à chaque carbone *sont identiques,* et il faut remplacer

$$X \text{ et } X', \quad Y \text{ et } Y', \quad Z \text{ et } Z'$$

par une même expression

$$H, \quad CO^2H, \quad OH.$$

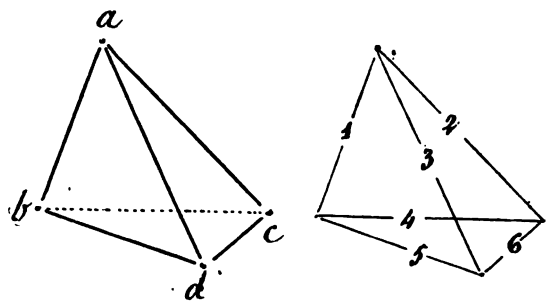
En faisant ces substitutions dans les quatre schémas du cas général, il se trouve que les deux derniers ont un plan de symétrie P passant par le sommet de jonction : *ils n'en font plus qu'un,* lequel donne une variété évidemment inactive et, de plus, *indédoublable.* Les deux autres schémas donnent les variétés *droite* et *gauche,* dont le mélange en donne une quatrième appelée *acide racémique,* inactive et dédoublable. Ces quatre variétés existent.

Deux carbones étant en liaison simple, l'un peut se lier de même à un troisième, celui-ci à un quatrième, etc.: c'est *une chaîne* où les deux carbones extrêmes ont trois valences libres et les intermédiaires deux. Ce n'est pas tout. La liaison de deux carbones dans la molécule peut se faire par l'échange de *deux valences*, comme dans l'*éthylène*, qui est une des parties constituantes du gaz d'éclairage : alors les deux tétraèdres se pénètrent *suivant une arête.* Elle peut encore se faire *par trois*, comme dans l'*acétylène*, et les deux tétraèdres se pénètrent alors *suivant une face.* C'est à partir de là que la Stéréochimie se complique ; qu'elle se divise en une branche mathématique et une branche chimique; qu'il peut y avoir dans la molécule à la fois des liaisons simples et des liaisons doubles ; qu'à la suite des précédents, simples *iso-*

mères de position. va se ranger la troupe serrée des *isomères par substitution;* que le schéma tétraédral se fait apprécier de plus en plus ; enfin que le chimiste accomplit des merveilles pour réaliser les corps que la Géométrie lui signale, et accumule cette énorme masse de matériaux dont on peut se faire une idée en jetant les yeux sur le *Dictionnaire des combinaisons du carbone,* de Richter (1). C'est également là que nous arrêterons notre exposition préliminaire (2), espérant que ses sept pages n'auront pas été inutiles pour la diffusion d'une science déjà largement constituée, mais encore peu connue.

III. Le carbone *n'est que quadrivalent.* Le schéma de ses valences s'est offert à nous de lui-même, et il fonctionne avec une complaisante régularité. Quelles que soient (*fig.* 45) les positions,

Fig. 45.



L'atome à quatre valences.

inconnues de nous, qu'occupent autour de l'atome les extrémités *a*, *b*, *c*, *d* des quatre valences X, Y, Z, V, ce schéma s'y emboîte exactement ; il peut allonger ou raccourcir ses six arêtes 1, 2, 3, 4, 5, 6 à la demande des six distances *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, car la Géométrie n'impose aucune condition aux six distances de

(1) *Lexicon der Kohlenstoffverbindungen,* von M. M. RICHTER. Hamburg et Leipzig, 1900. 2 vol. compacts gr. in-8° de 2500 pages. — Le nombre des combinaisons du carbone est supérieur à 100 000 et s'augmente chaque année de plusieurs milliers.

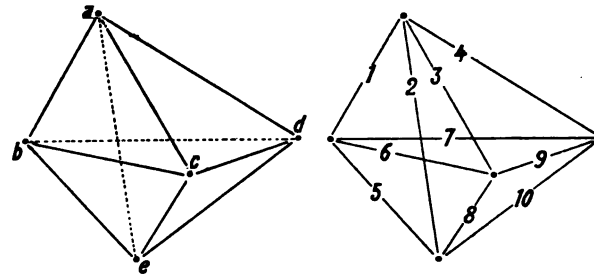
(2) *Voir* pour plus de développements : G. MONOD, *La Stéréochimie,* exposé des théories de Le Bel et de Van't Hoff, in-8°, Paris, 1895. — FREUNDLER, *La Stéréochimie,* Paris, 1902, de la Collection *Scientia.*

quatre points de l'espace. Cet emboîtage *se fait tout seul*, sans que nous ayons à nous en occuper ; c'est pour cela que nous avons pu faire abstraction de la forme géométrique du tétraèdre et raisonner toujours au moyen de la figure 41, qui n'est après tout qu'un *quadrilatère quelconque*.

Il n'en va pas de même avec l'azote. Ce corps bizarre, qui fait le désespoir des chimistes par ses caprices et par l'instabilité qu'il apporte dans les édifices moléculaires, est tantôt trivalent, comme dans l'ammoniaque AzH^3, et tantôt quintivalent, comme dans le sel ammoniac AzH^4Cl ; en d'autres termes, il est susceptible de présider à des organisations de la forme AzXYZ, ou de la forme AzXYZVU. Les premières, où l'on pourrait supposer ses trois valences dirigées suivant les trois arêtes d'un trièdre, n'ont jamais le pouvoir rotatoire, on ne sait trop pourquoi, et sont ici sans intérêt. Les secondes en jouissent quand X, Y, Z, V, U sont *tous différents*. Il y a dans ce cas une isomérie d'ordre stéréochimique qui est analogue à celle du carbone, et à laquelle on voudrait trouver un schéma rendant les mêmes services.

La figure 46, formée de deux tétraèdres accolés par une face,

Fig. 46.



L'atome à cinq valences.

présente bien cinq pointes, et admet une inverse qui ne lui est pas superposable, mais les chimistes repoussent ce schéma, qu'ils ont trouvé rebelle à certains faits d'expérience. Voici probablement la raison de son incapacité.

Pendant la période de constitution de la molécule, les extrémités des valences oscillent autour de certaines positions *a*, *b*, *c*, *d*, *e* où elles finissent par s'arrêter ; les deux forces antagonistes,

qui règnent entre *une quelconque de ces extrémités et chacune des neuf autres,* oscillent autour de certaines grandeurs qui finissent par des grandeurs définitives i; enfin les dix droites sur lesquelles sont ces forces, après avoir partagé les mêmes péripéties, finissent aussi par se figer en des longueurs définitives ab, qui sont des fonctions des i. Rien ne dit que ces dix fonctions ne sont pas indépendantes les unes des autres et, pour avoir toute la généralité désirable, il faut les supposer telles.

Or les dix distances entre cinq points de l'espace *ne sont pas indépendantes les unes des autres.* Pour nous en rendre compte en passant du plus simple au moins simple, prenons d'abord le cas de *trois points sur une ligne droite.* Leurs distances sont au nombre de $\frac{3.2}{1.2} = 3$, et il existe entre elles une relation, des plus simples et des plus faciles à écrire, qui fait que lorsqu'on en donne deux la troisième s'ensuit.

Si nous considérons *quatre points sur un plan,* leurs distances sont au nombre de $\frac{4.3}{1.2} = 6$, et il suffit de penser au *quadrilatère complet,* pour voir qu'elles sont liées ensemble par une relation, maintenant assez compliquée, en vertu de laquelle cinq suffisent pour déterminer le tout. Enfin, si nous considérons *cinq points dans l'espace,* leurs distances sont au nombre de $\frac{5.4}{1.2}$, ce qui fait *dix,* et il y a toujours entre elles une relation obligée. Cette relation a été étudiée, entre autres, par Lagrange, Cayley, Mansion et Carnot, auxquels nous renvoyons le lecteur qui en voudrait la démonstration (1). Voici toutefois la relation elle-même, pour les amateurs de formules compliquées. Soient a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3,

(1) LAGRANGE, *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (*OEuvres,* t. III, p. 659-692). La première publication est de 1773 (*Mémoires de l'Académie de Berlin*). — CAYLEY, *On a theorem in the Geometry of Position* (*Messenger of mathematics,* t. XVIII, 1889, p. 100, et *Collected math. papers,* t. XII, p. 581). — MANSION, *Relation entre les distances de cinq ou de six points en Géométrie euclidienne et en Géométrie non euclidienne* (*Ann. de la Soc. de Bruxelles,* 1894-1895, p. 189). — CARNOT, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace.* Paris, Courcier, 1806. La démonstration de Carnot est assez laborieuse.

g_1, g_2, g_3, f les carrés des dix distances. Prenons, pour abréger,

$$\begin{aligned}\alpha &= -(a_2-a_3)^2+2c_1(a_2+a_3)-c_1^2,\\ \alpha' &= -(a_3-a_1)^2+2c_2(a_3+a_1)-c_2^2,\\ \alpha'' &= -(a_1-a_2)^2+2c_3(a_1+a_2)-c_3^2;\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\beta &= -(a_3-a_1)(a_1-a_2)+2c_1a_1-c_2(a_1+a_2)-c_3(a_3+a_1)+c_2c_3,\\ \beta' &= -(a_1-a_2)(a_2-a_3)+2c_2a_2-c_3(a_2+a_3)-c_1(a_1+a_2)+c_3c_1,\\ \beta'' &= -(a_2-a_3)(a_3-a_1)+2c_3a_3-c_1(a_3+a_1)-c_2(a_2+a_3)+c_1c_2;\end{aligned}$$

puis encore

$$\begin{aligned}D^2 = {} & c_1(a_3-a_1)(a_1-a_2)+a_1c_1(c_3+c_2-c_1)\\ & +c_2(a_1-a_2)(a_2-a_3)+a_2c_2(c_1+c_3-c_2)\\ & +c_3(a_2-a_3)(a_3-a_1)+a_3c_3(c_2+c_1-c_3)-c_1c_2c_3;\end{aligned}$$

et enfin

$$A = a_1+f-g_1, \qquad A' = a_2+f-g_2, \qquad A'' = a_3+f-g_3;$$

la relation est alors

$$D^2 f = \alpha A^2+\alpha' A'^2+\alpha'' A''^2+2\beta A'A''+2\beta' A''A+2\beta'' AA'.$$

Désignant par (12) la distance des points 1, 2, et de même pour les autres, Cayley condense la relation sous cette déterminantielle, que Mansion démontre avec beaucoup d'élégance :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) & (15)\\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) & (25)\\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) & (35)\\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 & (45)\\ 1 & (51) & (52) & (53) & (54) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si compliquée que soit cette formule, la figure de cinq points n'en est pas moins tenue de lui obéir sans réserve et n'est pas la libre maîtresse de ses dix distances : elle ne pourra pas, comme faisait tout à l'heure celle de quatre, les allonger ou les raccourcir à la demande des dix fonctions, et le chimiste se plaindra qu'elle n'a pas une adaptabilité suffisante.

S'il est nécessaire que vous ayez pour le cas de cinq valences un schéma aussi élastique que le tétraèdre pour celui de quatre, le troisième champ ne suffit pas et il vous faut passer dans le quatrième. Là seulement vous trouverez l'indépendance entre les dix distances de cinq points, et l'emboîtage de la figure schématique sur celle des valences se fera encore automatiquement.

Mais celui-ci devient insuffisant à son tour si vous voulez opérer avec une molécule à *six valences;* alors se présente le cinquième champ, *et ainsi de suite.* Soulignons une dernière fois ces quatre petits mots que nous avons vu revenir si souvent : *partout* le terme que nous arrivons à saisir se noue à un terme supérieur comme le maillon d'une chaîne au suivant, avec la différence que ce terme supérieur est toujours beaucoup plus compliqué. Que deviendrait, par exemple, l'équation de la page 212 pour les *quinze distances de six points dans le cinquième champ?*

IV. Il ne faudrait par considérer le tétraèdre des figures 41 et 42 comme étant à un degré quelconque un reflet de la forme ou de la structure de l'atome : ce n'est qu'une notation, un procédé graphique, un symbole, un schéma. De quelque façon que les mots *atome* et *molécule* entrent dans nos raisonnements, ils ne sauraient être autre chose. Il en est de même des mots *éther, fluide,* etc. Toutes ces entités, précieuses comme instruments d'étude et de recherches, se montrent, quand on les creuse, trop affligées de contradictions pour qu'on puisse croire à leur réalité, et bien rares sont les physiciens qu'une longue fréquentation à fait leurs dupes. Ce ne sont pas même des suppositions : seulement des schémas.

Tel est d'ailleurs le vrai caractère de la Physique moderne : toute schématique, elle ne pense nullement, comme dit M. Duhem (1), à passer derrière nos perceptions pour voir ce qu'il y a, mais elle cherche à les représenter par des *symboles* empruntés à la Géométrie ou à la Science des nombres, qu'elle connaît seule ensuite. Le *tétraèdre* de la figure 42, substitué à un certain effet sur la lumière, la *formule chimique* (p. 208) en sont des exemples typiques.

(1) *Le Mixte et la combinaison chimique,* in-8°, Paris, 1902.

Ce qui ressort de ce paragraphe et du précédent au sujet du quatrième champ, c'est le même caractère de schéma utile, venant se placer à côté des autres, en combler certaines lacunes et, comme eux, intéressant surtout ces parties pleines de la matière qui nous échappent. Aucun des faits mentionnés ne force de conclure à son existence réelle, mais le fait que cette existence réelle *n'implique pas de contradiction* donne au quatrième champ un caractère bien plus élevé qu'aux autres schémas, et fait penser à l'argument philosophique du paragraphe **47**. En tout cas, il ne serait consacré que le jour où il ferait prévoir quelque phénomène encore inconnu, et qui serait vérifié. Alors cependant, pas plus qu'aujourd'hui, nous ne pourrions dire que nous possédons une explication définitive de la nature : nous aurions tout simplement remplacé le vieux schéma par un autre plus fécond.

§ 51. — La place que nous aurions dans le monde à quatre dimensions.

Les personnes qui croient à des interventions extranaturelles ont en grand nombre jeté leur dévolu sur le monde à quatre dimensions, qui leur fournit un appui des plus commodes. Elles ont deux manières de pourvoir notre monde d'une place dans celui-là.

I. La plus naturelle consiste à considérer *l'espace* que nous habitons comme étant *la figure limitante* d'un corps matériel à quatre dimensions, de même que *la surface* sur laquelle nous marchons et que nous appelons la surface terrestre est *la figure limitante* d'un corps à trois dimensions. On sait, en effet (*voir* Chap. II), que les corps à quatre dimensions sont limités par des figures à trois dimensions, de même que ceux à 3, 2 et 1 dimensions le sont par des figures à 2, 1 et 0, c'est-à-dire par des surfaces, des lignes et des points.

Vous vous êtes sans doute arrêtés quelquefois, debout sur la rive, à suivre de l'œil les évolutions saccadées, rappelant celles du patineur sur la glace, qu'accomplit à la surface d'une eau tranquille, sans s'y mouiller mais sans pouvoir s'en séparer, cet hémiptère que le vulgaire appelle *tisserand* ou *araignée d'eau,*

et le naturaliste *hydrometra stagnorum*. Il est *si plat,* avec ses longues pattes, que votre esprit n'a pas de peine à le concevoir *beaucoup plus mince encore,* et à admettre qu'*il ne sait rien de ce qui est au-dessous ni de ce qui est au-dessus de la surface à laquelle il est attaché*. Avec vos trois dimensions, vous êtes la même chose vis-à-vis de l'homme qui en a une de plus. Debout sur notre espace; entouré de choses que vous ne pouvez pas vous figurer; doué d'une intelligence en rapport avec la complication de ces choses et les ressources qu'elles contiennent; voyant tous les points de notre espace distincts les uns des autres comme nous voyons ceux du plan qui est sous nos pieds; joignant peut-être à ces facultés celle de *connaître le temps avec deux dimensions,* qui lui permettrait de même d'embrasser simultanément toute la succession d'une d'elles (1), etc., cet homme est subordonné, lui aussi, à des créations d'un ordre plus élevé.

Si l'on admet, par analogie, que le support matériel est *une hypersphère solide* (2), notre habitat serait une *couche hypersphérique infiniment mince suivant la quatrième dimension*, de même que l'insecte rappelé plus haut peut se figurer que le sien est une *couche sphérique infiniment mince suivant la troisième*. Ce serait un *espace courbe,* qui n'est pas infini, où deux droites quelconques se rencontrent toujours, où la somme des trois angles d'un triangle est plus grande que deux droits, etc. Cet *excès hypersphérique,* s'il existait et si l'on pouvait le constater, pourrait être un argument en faveur de l'existence d'un pareil support. Mais il est évi-

---

(1) Cette idée ingénieuse est de M. le capitaine Boucher : *L'hyperespace et le temps.*

(2) Le lecteur n'ayant pas suivi régulièrement notre exposition pourrait croire que ces mots désignent des choses plus ou moins vagues. Nous le renverrons au paragraphe 33 du *Traité élémentaire,* où, sous les noms de *contenant* et *contenu,* ces deux choses : *couche hypersphérique* et *hypersphère,* sont évaluées tout comme le sont, dans la Géométrie à trois dimensions, la *surface* et le *volume* de la sphère; seulement les unités sont maintenant plus élevées d'un degré : au lieu du *mètre carré* et du *mètre cube*, nous avons le *mètre cube* et le *mètre octaédroïde*. Le même lecteur peut encore se reporter à l'un des polyédroïdes réguliers étudiés au Chapitre II, par exemple l'hexadécaédroïde des figures 9, 10 et 11; ce corps, limité par des espaces dont les intersections forment des triangles, est à l'hypersphère ce qu'un polyèdre régulier, limité par des plans dont les intersections sont des segments de droites, est à la sphère.

demment très petit, vu l'immensité du rayon qu'il faut supposer à l'hypersphère sous-jacente. Dans les plus grands triangles que l'astronome puisse mesurer, dans ceux-là mêmes que feraient en concertant leurs télescopes trois astronomes stationnés sur trois planètes différentes, il doit disparaître sous les erreurs attribuables aux imperfections de ces instruments (1). Si donc notre espace n'est pas rigoureusement euclidien, il l'est pratiquement : sa courbure et celle du support sont nulles pour nous, et nous pouvons considérer la perpendiculaire qui leur serait élevée en un point quelconque comme parallèle à une direction fixe.

II. Moins rationnelle, mais plus connue, la seconde manière prend, pour l'espace dans lequel nous nous agitons, un quelconque de ceux, en nombre ∞^4, qui forment ensemble l'étendue quadridimensionnelle, et dont chacun la partage en deux régions infinies entre lesquelles il forme une couche infiniment mince. Tel serait pour nous, en descendant d'un degré, un *voile léger*, habité par des êtres à épaisseur nulle ou très faible, qui serait tendu en travers de notre espace, allant se perdre en un seul cercle indécis dans ce que le géomètre appelle la *sphère de l'infini* (2).

C'est la conception de Zöllner, l'auteur qui s'est livré le plus à ce genre d'applications de la Géométrie. Décédé en 1882, professeur à l'Université de Leipzig, il avait consigné le résultat de ses études dans cinq énormes volumes publiés en 1872 (3). Partant de ce fait que la projection d'un corps à quatre dimensions sur notre espace est un corps à trois dimensions, il considère notre monde comme l'*ombre* ou la *projection* d'un monde à quatre dimensions que nous ne pouvons pas voir directement, et qui est *plus réel* que le nôtre, de même que les corps à trois dimensions sont plus réels que leur ombre portée sur un mur ou que leur image sur le verre

---

(1) *Voir*, pour plus de détails sur ce point, dans la jolie collection *Scientia*, le volume : *La Géométrie non-euclidienne*, par Barbarin, 1902. *Voir* aussi le premier alinéa de la citation de Taine, page 196.

(2) Un roman anglais (*Flatland, A romance of many dimensions*, London, Selley, 1886) se passe dans ce monde si peu favorisé.

(3) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Leipzig, 1872. (Il n'est guère facile de mettre la main sur cet Ouvrage; on le trouve à la bibliothèque Mazarine.)

du photographe (1). Notre monde serait à celui-là ce que, dans les épures du Chapitre II, le polyèdre que représentent ensemble les deux projections A et B est à l'hypercorps que représentent ensemble les quatre projections A, B, C et D. De fait, les deux hypercorps sont sans doute aussi imaginaires l'un que l'autre, mais il faudrait bien accepter aussi celui de Zöllner s'il rendait à la Physique les mêmes services que ses congénères à la Géométrie.

Voulant nous en tenir à la question posée par le titre de ce Chapitre, nous ne parlerons que des arguments sur lesquels Zöllner cherche à établir l'existence matérielle d'un pareil monde. Ils sont nombreux et variés, mais de valeur médiocre. Voici, par exemple, comment il présente le phénomène de la vision.

Suivant lui, celle-ci consiste uniquement dans la création d'une image sur chaque rétine; par suite, l'homme n'a originairement qu'une intuition bidimensionnelle de l'espace, mais l'impossibilité d'expliquer tous les mouvements dont il avait la sensation l'a amené à transformer cette intuition en une autre ayant trois dimensions. C'est ainsi que l'astronome, en observant les mouvements des planètes sur une surface sphérique, a été amené à substituer à cette surface un firmament à trois dimensions pour remplacer une complication inextricable par quelque chose de très simple. Une connaissance plus exacte des phénomènes, ajoute Zöllner, forcera notre esprit à compléter par une quatrième les trois dimensions déjà acquises, et cette conception sera aussi familière à l'*homme du* XX^e^ *siècle* que celles des trois dimensions dans lesquelles se meuvent les corps célestes l'est à nous-mêmes depuis Copernic.

Or il a été montré dans le *Traité élémentaire,* que la vision humaine dépend en réalité non *de deux variables,* mais *de quatre* réduites pratiquement à trois. En sorte qu'on pourrait dire, renversant le raisonnement de Zöllner, qu'elle est originairement à quatre dimensions, mais que l'homme primitif, sans doute parce

(1) S'il en était ainsi, l'image tridimensionnelle du monde à quatre dimensions se produirait aussi sur les espaces qui sont parallèles au nôtre et serait répétée à l'infini. Nous ne pensons pas qu'on puisse rien tirer d'utile de ce genre de considérations et nous ne donnons l'idée, comme plusieurs autres, que pour faire saisir de mieux en mieux la conception géométrique.

qu'il trouvait cela trop compliqué, l'aurait ramenée à trois par un lent travail d'accommodation.

§ 52. — Les arguments de Zöllner.

I. Nous passons à des considérations d'autre nature. Ce sont celles qui admettent, ou prétendent prouver, l'existence réelle d'êtres intelligents extraterrestres et leur intervention effective dans nos affaires. Le champ du quatrième degré, tel qu'il a été défini et étudié ci-dessus, fournirait à de pareils êtres un corps matériel et un habitat, et expliquerait leurs relations avec notre monde, n'y laissant de mystérieux que la quatrième dimension elle-même, qui échappe à notre entendement mais non à notre analyse.

En premier argument, les adeptes de cette manière de voir invoquent l'autorité des penseurs éminents de diverses époques, c'est-à-dire apportent *des citations.* Ce genre de démonstration n'est guère de mise dans l'ordre exclusivement mathématique ou physique où nous nous cantonnons, mais il peut mettre au jour des choses intéressantes. Mentionnons par exemple, et ce sera tout, les deux passages suivants, desquels on a voulu conclure que l'idée des quatre dimensions ne fut pas étrangère aux auteurs sacrés.

On lit dans le Livre de Job, Chapitre XI, versets 7 à 9 : *Forsitan vertigia comprehendes et usque ad perfectum Omnipotentem reperies? Excelsior cœlo est, et quid facies? Profundior inferno et unde recognosces? Longior terrâ mensura ejus et latior mari.* C'est-à-dire : *Est-ce que tu aurais la prétention de connaître le Tout-Puissant? Il est plus haut que le ciel, plus profond que l'enfer, plus long que la Terre et plus large que la mer.*

Dans Saint-Paul, Épître aux Éphésiens, Chapitre III, verset 18 : *Ut possitis comprehendere cum omnibus Sanctis quæ sit latitudo, et longitudo, et sublimitas, et profondum.* Il s'agit, suivant les commentateurs bibliques, du mystère de la bonté divine; craignant qu'il ne fût réellement trop mystérieux avec quatre dimensions, quelques-uns traduisent *longitudo* par *durée,* tandis que d'autres traduisent *profondum* par *incompréhensibilité;* mais il

est bien clair que, dans l'esprit de l'auteur, les quatre mots désignent quatre choses de même nature.

C'est de l'hyperespace et des hypercorps que les auteurs en question entendent ces paroles de l'Évangile.

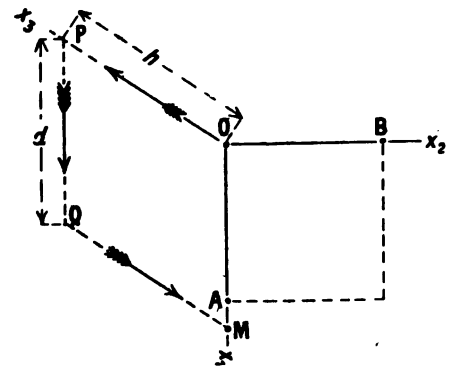
II. Voici les deux principaux arguments de Zöllner; ils seraient de première valeur s'il n'était pas permis de les prendre pour des supercheries.

Pour les bien faire comprendre, il nous faut, suivant la méthode qui nous a servi tant de fois, donner à chacun un préambule tiré du monde à trois dimensions. En outre, nous commençons par rappeler le principe fondamental de la Géométrie quadridimensionnelle : *Comme une droite, lieu simplement infini, forme une tranche élémentaire entre deux régions du plan deux fois infini; comme un plan, lieu deux fois infini, forme une tranche élémentaire entre deux régions de l'espace trois fois infini; de même un espace, lieu trois fois infini, forme une tranche élémentaire entre deux régions de l'étendue quatre fois infinie. Dès lors : toute droite menée d'un point quelconque* P *d'une de ces régions rencontre cet espace en un point unique: tous les points de cet espace sont sur autant de directions différentes partant du point* A, *s'étalent au même niveau pour un être placé en ce point et sont vus par lui simultanément; deux points quelconques situés l'un et l'autre dans cet espace déterminent une droite qui y est tout entière et ne saurait passer par le point extérieur* P.

1° Tout le monde connaît l'apologue du scorpion qui, entouré d'un cercle de charbons ardents et reconnaissant l'impossibilité de le franchir, tourne sur lui-même son dard venimeux. Il ne serait pas réduit à cette extrémité si, comme l'oiseau, il pouvait s'élever sur la troisième dimension, qui est la verticale, ou si un être pouvant agir suivant celle-ci le prenait et le transportait par-dessus l'obstacle. La figure 47 indique cette opération. Le plan sur lequel l'animal réside est défini par les deux axes Ox_1, Ox_2 ou par un carré dont ces axes sont deux côtés ; on n'a marqué de l'obstacle circulaire que les points A et B en lesquels il les coupe. Ox_3 est la verticale et OPQM est le trajet libérateur, OM étant plus grand que OA.

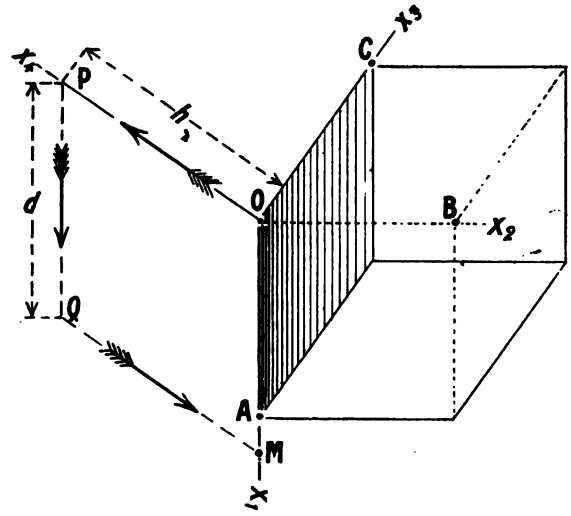
De même l'être à trois dimensions qui serait enfermé dans une enveloppe sphérique hermétiquement close pourrait en sortir

Fig. 47.



sans effraction s'il disposait de la quatrième dimension. Par le centre de cette enveloppe, on a mené dans la figure 48 trois axes

Fig. 48.



Ox_1, Ox_2, Ox_3 sur lesquels on a marqué les points A, B, C en lesquels ils percent la sphère, et sur lesquels on a construit un cube censé représenter l'espace la contenant. La perpendiculaire Ox_4 à

cet espace ne rencontre la sphère nulle part ; on peut donc, comme dans le cas précédent, aller du point O à un quelconque P de ses points, puis revenir de celui-ci à un point M de l'espace qui soit extérieur à la sphère.

Le lecteur peut, si cela lui convient, *mettre l'opération en équations :* comme à l'ordinaire, il y verra moins clair mais sera peut-être plus satisfait. Prenons notre espace pour celui des $x_1 x_2 x_3$, et

$$x_4 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

pour l'équation de la surface sphérique. L'intersection de celle-ci par l'espace des $x_1 x_2 x_4$ est

$$x_4 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 = R^2 :$$

c'est un cercle et aucun autre point de la sphère ne se trouve dans ce deuxième espace. Nous considérant comme devenu un habitant de celui-ci, nous sortons du cercle suivant la perpendiculaire à son plan et passons du point O à un autre point P,

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = h.$$

Nous pouvons aller de celui-ci, par une parallèle à Ox_1, à un troisième Q,

$$x_1 = d, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = h,$$

et enfin, par une parallèle à Ox_4, revenir dans le premier espace au point M,

$$x_1 = d, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0 :$$

nous n'aurons jamais touché la sphère si $d > r$.

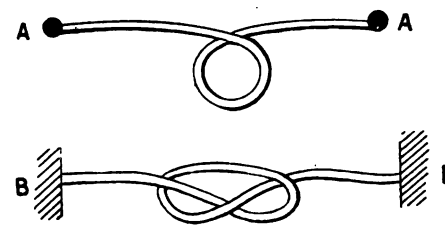
C'est d'un pareil fait que Zöllner fut témoin. Un grain de blé (*ein Schrotkorn*) enfermé dans une sphère de verre en disparut à la volonté du médium et reparut au dehors, transporté, disait celui-ci, par un être de l'hyperespace à ses ordres.

Ayant deux anneaux engagés l'un dans l'autre, et faisant suivre à l'un des deux le chemin que nous venons de décrire, on exécute le *jeu des anneaux* avec la même facilité.

2° Avec une corde, faites une boucle et ramenez chaque brin dans la direction qu'avait l'autre, formant ainsi un point double

(*fig.* 49, A); posez cette figure sur une planchette et scellez-y les deux bouts. Il est clair qu'on ne pourra pas défaire la boucle si l'on est obligé de laisser la corde à plat et qu'on ne puisse lui faire faire que des mouvements le long de la planchette; mais ce sera facile si l'on peut la soulever et la redresser, c'est-à-dire *emprunter la troisième dimension.*

Fig. 49.



Avec une autre corde, faites un nœud : le plus facile de tous, celui qui s'appelle le nœud droit simple (*fig.* 49, B); puis scellez les deux bouts sur deux poteaux ou contre les murs de la chambre; le nœud sera *indéfaisable.* Mais on pourra le défaire si l'on dispose de la quatrième dimension : la démonstration en a été donnée par une analyse assez compliquée, que nous nous abstiendrons de reproduire parce qu'elle n'a d'autre intérêt que celui de la difficulté (1). Slade opéra ce nouveau tour de force devant Zöllner qui fut de plus en plus convaincu de ses intelligences avec le monde dont nous sommes la projection.

§ 53. — Résumé du Chapitre.

1° Dans l'ordre mathématique, la question de l'existence des champs supérieurs ne se pose même pas. Nous n'avions pas à établir la légitimité, mais seulement l'utilité d'une pareille extension de la Géométrie classique; nous croyons l'avoir fait suffisamment en montrant quelle opulente moisson ont récoltée les cher-

(1) Durège, *Ueber die Hoppe'sche Knotencurve* (*Sitzungsb. der k. Akad. d. Wiss. zu Wien, mathematische Classe,* vol. LXXXII, juillet 1880, p. 135-146).

cheurs qui, en Allemagne, en Angleterre, en Hollande et en Italie, se sont engagés dans la voie ouverte en France.

2° Dans l'ordre physique, la conception du quatrième champ vient se placer à côté des conceptions déjà en usage, telles que l'atome et l'éther, comme un schéma analogue utile pour en combler certaines lacunes. Tout en s'en servant, on peut, *comme on le fait pour ceux-là,* le traiter de chimère; mais il n'est pas comme eux affligé de contradictions rédhibitoires, et rien n'empêche de lui attribuer une existence pareille à celle de notre espace, dont il partagerait la nature et dont il serait une sorte de prolongement. Les théories *dans lesquelles intervient l'atome* sont à peu près les seules, jusqu'ici, qui paraissent devoir tirer un utile parti de la quatrième dimension.

3° Allant plus loin, de nombreux penseurs font entrer dans le quatrième champ, non plus seulement le monde des infiniment petits, mais celui qui frappe nos sens; ils veulent faire fonctionner un univers physique et intellectuel jouissant réellement des quatre dimensions. Nous avons montré la place que le nôtre y occuperait; il nous a paru intéressant d'indiquer dans quel esprit sont conçus les principaux arguments que font valoir ses adeptes. Mais nous n'avons pas voulu nous étendre sur ces arguments intéressés, trop éloignés d'ailleurs du terrain mathématique où nous nous cantonnons.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE v

CHAPITRE I.

Coup d'œil sur les principes de la Géométrie à quatre dimensions.

1. Premier axiome, définissant le point isolé 1
2. Deuxième axiome, établissant la relation entre points différents 3
3. Les champs 4
4. Coordonnées générales et coordonnées surabondantes 5

CHAPITRE II.

Le système de coordonnées et les trois premiers polyédroïdes réguliers.

5. Le quadrièdre droit 9
6. Les plans de projection 14
7. Les vingt-quatre sommets 18
8. Les trois hexadécaédroïdes 22
9. L'octaédroïde 27
10. L'icosatétraédroïde 34
11. Observations générales 40

CHAPITRE III.

L'hexagramme de Pascal.

12. Les soixante hexagones 45
13. Les droites de Pascal 54
14. Les points de Kirkman 58
15. Les points de Steiner 62
16. Les droites de Plücker 64

Pages.
17. Les droites de Cayley..... 67
18. Les points de Salmon..... 68
19. Vue d'ensemble..... 69

CHAPITRE IV.

La surface du troisième degré.

20. Surface de Klein..... 73
21. Surface générale du troisième degré..... 79
22. Le double-six de Schläfli..... 81
23. La projection de Zeuthen..... 86
24. Plans bitangents et tritangents..... 90
25. Construction des vingt-sept droites..... 94
26. Les compartiments et les ouvertures..... 98
27. Particularisations..... 101
28. L'hexagramme dans l'espace..... 104
29. L'hexagramme dans l'espace (suite)..... 114
30. Observations sur la méthode de Cremona..... 123

CHAPITRE V.

L'hexagramme et l'hexastigme.

31. Éléments de l'hexastigme..... 125
32. Espaces cardinaux..... 127
33. Seconde notation des transversales..... 130
34. Section plane de l'hexastigme..... 132
35. Section spatiale de l'hexastigme..... 134
36. La figure de six espaces..... 139
37. Projection plane..... 141
38. L'hypersurface de Segre..... 142
39. La surface de Kummer..... 146
40. Résumé et conclusion des Chapitres III, IV et V..... 147

CHAPITRE VI.

Les hypersurfaces du second degré.

41. Principes de la discussion de l'équation générale du second degré entre quatre coordonnées..... 151

Pages.
42. Hyperquadriques ayant une infinité de centres..... 156
43. Hyperquadriques n'ayant qu'un centre..... 160

CHAPITRE VII.

Les quartiques.

44. Classification..... 167
45. Une nouvelle halte dans la Géométrie à trois dimensions..... 174
46. Projection de la quartique sur notre espace..... 182

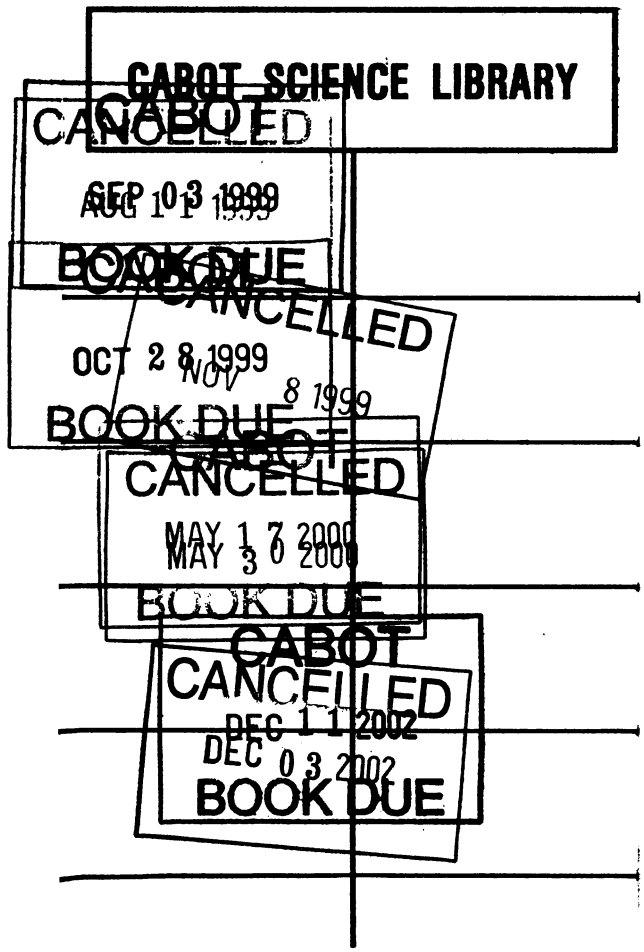
CHAPITRE VIII.

La question de l'existence réelle de l'hyperespace.

47. Argument philosophique..... 191
48. L'argument des polyèdres symétriques..... 192
49. Molécule et atome..... 198
50. Argument tiré de l'atome plurivalent..... 201
51. La place que nous aurions dans le monde à quatre dimensions..... 214
52. Les arguments de Zöllner..... 218
53. Résumé du Chapitre..... 222

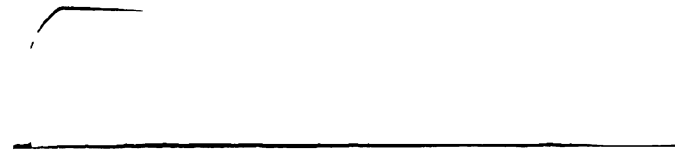
FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

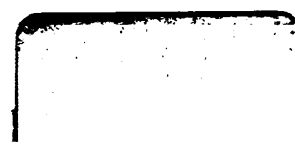
PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 02129

3 2044 030 610 802





3 2044 030 610 802